Historia de una Decisión

LECCIÓN INAUGURAL CURSO ACADÉMICO 2018-2019

Francisco Ruiz de la Rúa
Catedrático de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa

Departamento de Economía Aplicada (Matemáticas)
Universidad de Málaga

Septiembre 2018

Historia de una Decisión

Lección Inaugural
Apertura del Curso Académico

2018-2019

Departamento de Economía Aplicada (Matemáticas)
Universidad de Málaga

Septiembre 2018

A Ralph E. Steuer
y Craig A. Piercy,
por acogerme, sin conocerme,
en mi aventura americana
y acompañarme y apoyarme
en mis primeros pasos como investigador.

Concisión en el estilo,
precisión en el pensamiento,
decisión en la vida.
Victor Hugo

Agradecimientos

Cuando a uno le encargan la impartición de la lección inuagural del curso académico de su universidad, por el dudoso mérito de *ser el catedrático más antiguo de su centro*, parece inevitable que su mochila de agradecimientos esté llena de reconocimientos a los que, de una forma u otra, han puesto de su parte en la configuración de lo que uno es hoy profesionalmente. Y es que, con el paso del tiempo, me voy sintiendo más libre (y, a la vez, más obligado) para volcar lo que soy en cuanto hago.

Así que, empezando por el principio, agradezco a mis padres, hermanas, esposa, hijas, resto de familia y amigos por estar siempre ahí y por haberme enseñado tantas cosas a lo largo de mi vida.

Profesionalmente, debo mi dedicación investigadora al ámbito de la Toma de Decisiones Multicriterio (objeto, como no podía ser de otra forma, de esta lección inaugural) a María Victoria Rodríguez Uría, profesora de la Universidad de Oviedo, quién llegó a nuestro departamento, hace algún que otro año ya, para hablarnos de la Programación por Metas, al profesor Rafael Caballero Fernández, mi director de tesis y, sin embargo, amigo, que supo ver el potencial de aquella metodología y encaminó en esa dirección mis primeros pasos como investigador, y a la profesora Lourdes Rey Borrego, mi querida amiga y compañera en aquel proceso de la elaboración de la tesis doctoral.

Dos excelsos investigadores fueron más tarde claves en mi formación. El profesor Ralph Steuer, de la Universidad de Georgia (EE.UU.), me recibió como profesor visitante, me enseñó a bucear en la bibliografía multicriterio, y me orientó hacia el uso de técnicas interactivas. Siendo como es una de las principales figuras a nivel internacional de nuestra disciplina, su sencillez como persona y su entrañable carácter han supuesto las más importantes lecciones que de él he recibido. El profesor Carlos Romero, de la Universidad Politécnica de Madrid, sin duda el investigador español más importante en el ámbito de la Toma de Decisiones Multicriterio (MCDM), me ha concedido repetidamente el privilegio de su consejo científico, y el regalo de su amistad.

El profesor José Manuel Cabello González, de la Universidad de Málaga, me acompaña desde hace mucho tiempo en mis tareas docente e investigadora, en muchos desayunos y en muchas actividades fuera del ámbito laboral. Le agradezco sus lecciones de Economía, su entusiasta apoyo a todas mis propuestas y su desinteresada amistad.

He tenido el privilegio de no publicar jamás un trabajo en solitario. No hay nada más enriquecedor que el trabajo en equipo, cuando se está abierto a aprender siempre de los demás. Por eso, agradezco las aportaciones de todos los que han colaborado conmigo en algún trabajo científico, que son (aparte de todos los profesores arriba citados): Amalia Benítez, Analía Cano, José Manuel Cejudo, Laura Delgado, Samira El Gibari, Trinidad Gómez, Mercedes González, Mónica Hernández, Mariano Luque, Óscar Marcenaro, Francisca Miguel, Julián Molina, María del Mar Muñoz, Enrique Navarro, Beatriz Rodríguez, Ana Belén Ruiz y Rubén Saborido, de la Universidad de Málaga; Mar Arenas, Amelia Bilbao, Paz Méndez y Blanca Pérez, de la Universidad de Oviedo; Fernando Prieto, de la Agencia de Evaluación y Calidad; María del Puerto López de Amo y José Martín, de la Escuela Andaluza de Salud Pública; Petri Eskelinen, Kaisa Miettinen, Vesa Ojalehto, Dmitri Podkopaev y Karthik Sindhya, de la Universidad de Jyväskylä (Finlandia); Kalyanmoy Deb y Raoul Tewari, del Indian Institute of Technology Kanpur (India); Jamal Ouenniche y Kais Bouslah, de la Universidad de Edimburgo (Reino Unido); João Clímaco, de la Universidad de Coimbra (Portugal); y Andrzej Wierzbicki, del Instituto Nacional de Telecomunicaciones de Varsovia (Polonia). Como se puede observar, muchas oportunidades (aprovechadas) de aprender.

No olvidemos que esto es una lección, y debo agradecer también a aquellos que han colaborado en mi formación como docente: a mis compañeros del Departamento de Economía Aplicada (Matemáticas) de la Universidad de Málaga, con especial mención al que ha sido durante muchos años su director, el profesor Alfonso González Pareja, y a mis alumnos porque con ellos (y, quizás, a su costa) he aprendido a ser profesor.

Y claro, a los que me han ayudado en la redacción de esta lección inaugural. Aunque aparecen previamente citados, quiero dejar constancia de mi agradecimiento a mis compañeros Trinidad Gómez, Rafael Caballero y José Manuel Cabello por haber dedicado parte de sus vacaciones de verano a la cuidadosa lectura de esta lección inaugural. Sus sugerencias me han ayudado a mejorarla en gran medida. Finalmente, también he recibido aportaciones de los profesores Lorenzo Sevilla, de la Universidad de Málaga, Alfonso Mateos, de la Universidad Politécnica de Madrid, Amelia Bilbao, de la Universidad de Oviedo y Joaquín Pacheco, de la Universidad de Burgos. ¡Uf, qué alivio! ¡Sí que pesaba la mochila!

Resumen

Se suele decir que quien tiene opciones, tiene un problema. Es cierto. Si no hay opciones entre las que podamos elegir, no hay realmente un problema que resolver. Por ese mismo motivo, elegir o decidir es en cierta forma un acto de libertad, ya que decidimos según nuestras preferencias y no hay decisión que no tenga elementos subjetivos. Por eso, es difícil catalogar una decisión en cualquier contexto como *la mejor*, de forma indiscutible para todo el mundo. Personas distintas toman decisiones distintas en el mismo contexto, y una misma persona puede tomar decisiones distintas en distintas circunstancias.

El hombre hace gala (aunque no siempre) de su condición de animal racional, y la suele aplicar en la toma de decisiones (al menos, en las que considera importantes). Es cierto que a veces nos vemos obligados a decidir en fracciones de segundo, más guiados por la experiencia y la intuición que por la reflexión. Otras, sin embargo, llevamos a cabo procesos más pausados, en los que analizamos las alternativas posibles, sus pros y sus contras, y sus posibles implicaciones prácticas. El objetivo de esta lección es mostrar cómo las matemáticas nos pueden ayudar en determinadas situaciones a tomar la decisión más acorde a nuestras preferencias. Eso quiere decir que en ningún caso se elimina la figura del decisor, y su papel responsable en la decisión tomada. No vamos a determinar, porque no existe, una decisión científica, objetiva y universal. Se trata de proporcionar a la persona que toma la decisión las herramientas más adecuadas para hacerlo, siguiendo también, cómo no, su instinto y experiencia. Como ejemplo hipotético, me basaré en mis decisiones sobre el contenido y estructura de esta lección inaugural.

Este texto se divide en cuatro capítulos. En el primero, se introducen los conceptos básicos sobre las decisiones y la optimización, y se lleva a cabo un pequeño recorrido histórico por la Investigación Operativa, la rama de las Matemáticas que se encarga en general de la formulación y resolución de problemas de optimización, y por la Toma de Decisiones Multicriterio, que es la parte de la Investigación Operativa encargada de proporcionar herramientas matemáticas de apoyo a la toma de decisiones. En el segundo capítulo, se clasifican y describen brevemente las técnicas más conocidas de la Toma de Decisiones Multicriterio, mientras que en el tercero se comentan algunas de las muchas aplicaciones exitosas de dichas técnicas. El texto finaliza con algunas conclusiones.

Índice

Índice de figuras

Índice de Tablas

Capítulo 1

Introducción: la decisión y las Matemáticas

1.1. La lección inaugural

El día 2 de julio de 2018 recibí la llamada del Señor Secretario General de la Universidad de Málaga, informándome de que me había correspondido el honor de impartir la lección inaugural en la Solemne Sesión de Apertura del curso académico 2018-2019. A partir de ese momento, debo tomar una serie de decisiones relativas al contenido y estructura de la lección:

- ¿Qué modelo de lección elijo? ¿Una más teórica, con una carga científica importante? ¿Una más divulgativa, con menos carga teórica pero más adecuada para oyentes con distinta formación?
- Siendo el tiempo de exposición limitado, ¿cómo distribuyo este tiempo entre los distintos apartados de la lección?

Para tomar estas decisiones, debo tener en cuenta distintos criterios, como el ya mencionado contenido científico de la lección, su amenidad, el número de aplicaciones prácticas que se mencionan, etc. Lamentablemente (o, quizás, afortunadamente), no hay una única solución a este problema de decisión. Si así fuera, todas las lecciones inaugurales tendrían la misma estructura. Obviamente, la decisión en este caso me corresponde a mí, y debo tomarla según mis preferencias, atendiendo, eso sí, a las directrices impuestas desde el departamento de Protocolo de la Universidad. Aún siendo, como todas, subjetivas, nada impide sin embargo que reciba alguna ayuda para tomar mis decisiones, en el buen entendido de que dicha ayuda no diluye en forma alguna mi responsabilidad sobre las mismas. Si atendemos a las modas modernas, podría contratar a un *coach* que, tras un adecuado proceso de *mentoring*, me ayudase a construir una lección adaptada al gusto de los principales *influencers* universitarios. ¡O mejor aún! Siguiendo las nuevas tendencias políticas, podría hacer una consulta popular, para que la gente vote el modelo de lección inaugural que prefiere. Me encuentro sin embargo con un problema para esto, y es que, a primeros de julio, no sé quiénes van a asistir a la lección inaugural a finales de septiembre, y a nadie con dos dedos de frente se le ocurriría, digo yo, hacer una consulta popular sin conocer el censo.

Pero, como dije anteriormente, no quiero eludir mi responsabilidad en la decisión, de forma que decido utilizar métodos más clásicos. Recurro por tanto a los libros y al consejo de los compañeros que figuran en el apartado de agradecimientos, y, por supuesto a las Matemáticas, cuyo apoyo me propongo demostrar en este texto que puede ser muy útil en determinados problemas de decisión. Pero antes, lo primero es lo primero, haré en las próximas secciones de esta introducción algunas reflexiones sobre el significado de *decidir* y sobre la distinción entre *lo óptimo* y *lo mejor*, y proporcionaré algunos apuntes históricos sobre las ramas de las Matemáticas que se encargan de la resolución de este tipo de problemas.

1.2. ¿Qué es decidir?

Los matemáticos tenemos muchas manías, no todas malas. Una que creo que no lo es, consiste en, antes de empezar a enredar con un determinado concepto, definirlo. Eso ahorra muchos malos entendidos y más de una interpretación interesada. Definamos, por tanto, *decidir*. Según el diccionario de la Real Academia Española, *decisión* es: determinación, resolución que se toma o se da en una cosa dudosa. Por su parte, *decidir* es: hacer una elección tras reflexionar sobre ella. Parece ser que no hay lección inaugural que se precie que no tenga un significativo contenido de citas de personajes ilustres. No iba yo a ser menos, así que me fui a internet a buscar citas sobre *decisión*. Debo admitir, no sin cierto rubor, que no conocía a la mayoría de los "personajes célebres" de las citas, pero aún así, me quedé con dos que me parecieron adecuadas para esta lección:

- El escritor británico-canadiense Malcolm Gladwell dice que *La toma de decisiones realmente exitosa reside en un equilibrio entre pensamiento deliberado e intuitivo.*
- Simon Sinek, escritor y motivador inglés (esto de "motivador", no sé muy bien lo que es, pero supuse que me iba a transmitir entusiasmo) dice que *No hay decisión que podamos tomar que no venga con algún tipo de equilibrio o sacrificio.*

De estas definiciones, extraemos los siguientes elementos que, a mi juicio, configuran las características básicas de toda decisión en el contexto científico que nos ocupa:

- **Duda**. Toda decisión se toma en un entorno de duda, y no existe la *mejor decisión* admitida por todos. Personas distintas toman, legítimamente, decisiones distintas para un mismo problema, y una misma persona toma decisiones distintas cuando las circunstancias cambian.

- **Reflexión**. Una decisión debe ser el resultado de una reflexión sobre sus distintas vertientes. Por ejemplo, construir un aeropuerto (con dinero de los demás, por supuesto), sin haberse cerciorado antes de que iba a haber aviones que lo usasen, no se puede catalogar en ningún caso como una decisión científica (Figura 1.1).

Figura 1.1: Aeropuerto de Ciudad Real: ejemplo de decisión no científica

- **Intuición**. Como llevo repitiendo insistentemente desde el comienzo, el papel del decisor[1] experto es vital en un proceso científico de toma de decisiones. Se trata de proporcionarle técnicas que le ayuden a encontrar la solución que más se ajusta a sus preferencias. Aunque también es cierto que, como mencionan Wierzbicki et al. (2000), cuanto mayor son el nivel y la experiencia del decisor, menos inclinado se muestra éste a confiar en las herramientas de análisis de decisión. Es importante, por lo tanto, que el decisor sienta en todo momento que está a los mandos del proceso de decisión (Korhonen y Wallenius, 1996).

- **Sacrificio**. En toda decisión hay que tener en cuenta más de un criterio, que son conflictivos entre sí, es decir, lo que es muy bueno para uno es probablemente muy malo para algún otro. En la mayor parte de los casos, una mejora en un criterio sólo se podrá producir a costa de un empeoramiento (sacrificio) en otro. Esta idea de tasa de intercambio (*tradeoff*, en inglés) entre criterios será de vital importancia en el desarrollo de métodos matemáticos de apoyo a la toma de decisiones.

El profesor Carlos Romero, a mi juicio el principal investigador español en el tema que nos ocupa, llama a este tipo de problemas en los que hay criterios múltiples *problema económico* (Romero, 1993), siguiendo la denominación de Friedman (1990). Como se verá, la Economía ha tenido un protagonismo fundamental en el desarrollo de esta disciplina. En contraposición, a los problemas en los que la decisión se establece en base a un único criterio los denomina *problemas tecnológicos*, que se insertan, como veremos más adelante, en el paradigma tradicional de

[1]Como indica (Bilbao, 2017), este término, que designa a la persona que decide, no fue admitido por la RAE hasta 2008.

la optimización. A poco que nos fijemos, descubrimos que en la mayor parte de las decisiones que se toman habitualmente se tienen en cuenta más de un criterio. Así, un inversor busca maximizar su rentabilidad y minimizar su riesgo; un tratamiento de radioterapia persigue maximizar la irradiación sobre las células cancerígenas, y minimizarla sobre los tejidos sanos circundantes; un estudio de sostenibilidad implica la consideración simultánea de criterios económicos, sociales y medioambientales; para elaborar un ranking de universidades hay que considerar criterios docentes y científicos, etc. Será bueno, por tanto, que antes de avanzar en el tratamiento matemático de los problemas de decisión, establezcamos la diferencia que puede haber entre lo óptimo y lo mejor.

1.3. Lo óptimo y lo mejor

Entonces, ¿qué es lo óptimo? Pues volviendo a la RAE, *óptimo* significa sumamente bueno, que no puede ser mejor. Parece claro que para decidir que algo es óptimo, sumamente bueno, hay que decidir cuál es el (único) criterio en base al cual lo es. Para un inversor, la inversión óptima puede ser la que maximiza su rentabilidad; para un empresario, la decisión óptima puede ser la que minimiza sus costes; para un consumidor, lo óptimo es maximizar su utilidad; para un viajante de comercio, la ruta óptima puede ser la que supone una menor distancia total recorrida, etc. Así pues, desde un punto de vista matemático, optimizar (maximizar o minimizar, según el caso) es encontrar, de entre un conjunto de soluciones posibles (factibles), la que es mejor para un determinado criterio. Por eso a este problema se le denominaba anteriormente problema tecnológico: es un problema de búsqueda y comparación, y todo el mundo está de acuerdo en cuál es la solución óptima, si la tecnología disponible nos permite encontrarla. La rama de las Matemáticas tradicionalmente encargada de dotarnos de esa tecnología es la Investigación Operativa.

Es obvio que la optimización tradicional funciona con éxito en multitud de aplicaciones reales, por lo que no es mi intención minusvalorarla en ningún caso. Por ejemplo, tras sesudas deliberaciones (que han costado multitud de años y no menos desencuentros políticos) sobre la manera de mejorar la calidad de nuestro sistema educativo, recientemente hemos conocido que se trataba de un problema de un único criterio: bastaba con hacer no evaluable la asignatura de religión. Si un problema se puede resolver con éxito optimizando un único objetivo, para qué darle más vueltas. Pero bromas (o menos bromas) aparte, la Investigación Operativa cosecha un larguísimo catálogo de aplicaciones exitosas que han permitido diseñar o mejorar procesos a través de la optimización tradicional. Pero esto no es óbice para poder afirmar que, en determinadas situaciones, lo óptimo no es, necesariamente, lo mejor. Ello puede deberse a diversas circunstancias. Un tema muy importante a tener en cuenta son las restricciones de nuestro modelo. ¿Podemos estar seguros de que toda restricción lo es efectivamente? Es decir, ¿no es admisible ninguna solución que viole esa restricción? Pongamos un ejemplo. Supongamos que estamos tomando la decisión sobre nuestras vacaciones de verano, y decidimos establecer una restricción presupuestaria: no vamos a gastar más de 2.000 €. Si encontramos unas vacaciones que cuestan 2.050 €, pero que nos producen una satisfacción mucho mayor que las otras que no pasan de 2.000 €, ¿estamos dispuestos a gastar esos 50 € adicionales? Si es así, la limitación presupuestaria no era realmente una restricción en sentido estricto, y se puede modelizar mejor como un objetivo (otro, además del que estábamos considerando) a minimizar. En esto nuestros dirigentes políticos tienen una gran experiencia, y permiten con frecuencia que las obras públicas que emprenden violen con muchísima holgura las restricciones presupuestarias iniciales. Y hay otro aspecto más relativo a las restricciones: lo óptimo suele estar habitualmente en la frontera de lo factible. Eso quiere decir que pequeñas perturbaciones en las condiciones de nuestro modelo pueden hacer que el óptimo obtenido no sea factible. Un ejemplo trivial de esto puede ser el repostaje de un avión. Repostar de forma óptima sería cargar el combustible estrictamente necesario para hacer el recorrido que se pretende, según el peso del avión. Ni una gota más. Obviamente, cualquier ligero imprevisto que ocasione una distancia recorrida mayor que la prevista convertiría nuestra solución óptima en (trágicamente) infactible.

En otros casos, lo óptimo, simplemente, no es una buena decisión. Tenemos dos ejemplos de ello en el ámbito educativo. Hace unos años, tras constatar que las universidades españolas quedaban mal posicionadas en los rankings internacionales, nos lanzamos a una carrera hacia la excelencia que ha resultado en que prácticamente todas las universidades españolas (hay algunas que no, para disgusto de sus correspondientes rectores) tienen algún tipo de mención, campus, estudios, etc. de excelencia. No es una buena decisión, entre otras cosas porque, recurriendo de nuevo a la bendita RAE, el vocablo excelente significa *que sobresale por sus óptimas cualidades* por lo que es imposible que todos seamos excelentes, ya que todos no podemos sobresalir, a no ser que demos saltos alternativamente (ya sé que el presidente Zapatero nos hizo pensar que cosas así eran posibles, anunciando en 2009 que, tras aplicar un nuevo modelo de financiación autonómica, todas las comunidades autonómas iban a quedar por encima de la media estatal en recursos por habitante, pero no se debería hacer mucho caso a ese tipo de anuncios en un entorno académico como el nuestro). Quizás sea más coherente perseguir una mejora en todas las universidades, y la excelencia sólo en algunas (muy pocas). Otro curioso fenómeno optimizador es el bilingüismo. En cierto momento, nos hacemos conscientes de que nuestros jóvenes no aprenden inglés adecuadamente, y decidimos, de la noche a la mañana, hacerlos a todos bilingües. Con ser el bilingüismo, desde luego, el aprendizaje óptimo de los idiomas, no parece que sea lo más fácil de llevar a cabo, ni siquiera que realmente necesitemos que todos los jóvenes sean bilingües. Basta con que aprendan mejor inglés. Eso sí, a entusiamo no nos gana nadie, y en poco tiempo llenamos los centros educativos de carteles que proclaman su bilingüismo, aunque ni siguiera el cartel lo sea (Figura 1.2). Yo mismo podía haber tomado mi decisión acerca del contenido y estructura de esta lección atendiendo al consejo del gran compositor alemán Ludwig van Beethoven: *nunca* *rompas el silencio, si no es para mejorarlo*. La optimización de este único criterio me hubiese llevado irremediablemente a no decir absolutamente nada, lo cual no parace tampoco que hubiese sido la decisión más adecuada. En fin, como muy bien dijo Voltaire, en muchas ocasiones, *lo mejor es enemigo de lo bueno*.

Figura 1.2: Educación bilingüe: lo óptimo no es lo mejor

Y además, como ya hemos mencionado anteriormente, en muchas decisiones reales debemos tener en cuenta más de un criterio, por lo que la optimización tradicional no resuelve el problema. Por todos estos motivos, la propia Sociedad Internacional de Investigación Operativa (The Institute for Operations Research and the Management Sciences, INFORMS[2]) lanzó en 2002 un nuevo lema para definirla: *The Science of Better*, es decir, la ciencia de mejorar, en contraposición a la optimización tradicional.

Aunque la Investigación Operativa se encarga de todos estos problemas, la rama específica que se dedica a los problemas de decisión con varios criterios es la Toma de Decisiones Multicriterio (Multiple Criteria Decision Making, MCDM, en inglés). Se trata, por lo tanto, de proporcionar técnicas matemáticas de apoyo a la toma de decisiones, para ayudar al decisor a elegir entre varias alternativas, atendiendo a diversos criterios, conflictivos entre sí. Es decir, como en general no existe una solución factible que sea a la vez la mejor para todos los criterios, estas técnicas ayudan al decisor a incorporar sus preferencias al modelo, para encontrar la solución que más se ajusta a ellas. En la próxima sección, haremos un breve recorrido histórico por la Investigación Operativa en general, y la Toma de Decisiones Multicriterio en particular.

1.4. Breve recorrido histórico

1.4.1. La Investigación Operativa

Aunque algunos autores como Ríos-Insua (1996) hablan de algunos antecedentes en los campos de las Matemáticas (Jordan, Minkowski y Farkas), la Estadística (Erlang) y la Economía (Quesnay y Walras), hay un acuerdo unánime en que la

[2] `www.informs.org`

Investigación Operativa nació como tal durante la Segunda Guerra Mundial. Tal y como detallan Newman (1968) y Churchman et al. (1971), a poco de iniciarse el conflicto, la Alemania nazi controlaba la mayor parte de Europa continental. Las operaciones militares de los aliados tenían una enorme dificultad logística. Se trataba de colocar una gran cantidad de tropas, atendiendo a criterios militares (ocupar los mejores lugares en términos estratégicos), pero también a criterios logísticos (estar lo más cerca posible de los recursos como el agua, el alimento, el combustible, etc.) En este contexto, los aliados (primero el Reino Unido, y más tarde los Estados Unidos) buscan ayuda científica y crean grupos interdisciplinares formados por biólogos, químicos, físicos, sociólogos, psicólogos y matemáticos, para hacer, como la llamaron, *Investigación de Operaciones Militares* (Military Operations Research), lo que dio más tarde origen al término Investigación Operativa (Operations Research) usado hoy día.

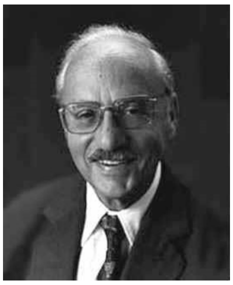
Fueron varios los éxitos conseguidos por estos grupos durante la guerra. Pacheco (2015) señala los siguientes como los más trascendentes:

- Un pequeño grupo de investigadores militares, la Bawdsey Research Station, encabezados por A.P. Rowe, estudian el uso militar de un, por entonces, nuevo sistema de detección denominado radar (RAdio Detection And Ranging). Generalmente se acepta que la investigación de este grupo constituye el inicio de la Investigación Operativa.

- El grupo ASWORG (Anti-Submarine Warfare Operations Research Group) realizó representaciones matemáticas sobre los temibles submarinos alemanes U-Boot, que atacaban incesantemente a convoyes de barcos que pretendían llevar suministros a Gran Bretaña. Estudiaron y modelizaron el tamaño de su flota, el alcance de los submarinos, los torpedos, etc., y propusieron una estrategia que permitió disminuir considerablemente la cantidad de barcos hundidos, a la vez que se incrementó espectacularmente el hundimiento de submarinos alemanes.

- En 1945, G.J. Stigler planteó el problema de la dieta, ante la preocupación del ejército americano por asegurar los requisitos nutricionales básicos de la tropa al menor coste posible. El problema fue resuelto manualmente mediante un método heurístico, con una solución sólo unos céntimos peor que la solución exacta que aportaría más tarde el método del símplex.

Algunos de estos grupos prosiguieron con sus investigaciones una vez finalizada la guerra. Es el caso de George B. Dantzig (Figura 1.3a), quien, como indica Gass (1985), fue el primero en desarrollar, junto con Marshall Wood y sus compañeros en el Departamento de la Fuerza Aérea de los Estados Unidos, el problema general de programación lineal. Como consecuencia, la Fuerza Aérea organizó un grupo de investigación denominado proyecto SCOOP (Scientific Computation Of Optimum Programs), lo que dio lugar al desarrollo del archi-conocido método del símplex para optimizar problemas lineales.



(a) George B. Dantzig

(b) Sixto Ríos García

Figura 1.3: Artífices de la Investigación Operativa

Es también unánime la opinión de los investigadores españoles a la hora de señalar al Profesor Sixto Ríos García (Figura 1.3b) como el padre (¿o debería decir "tutor legal"?) de la Investigación Operativa en España, siendo decisivo, a partir de 1970, tanto en su desarrollo científico, como en su inclusión en los planes de estudios de muchas universidades españolas. El crecimiento y desarrollo de la Investigación Operativa en España ha sido muy importante desde entonces, y Pacheco (2015) enumera las siguientes líneas de investigación de los principales grupos españoles:

- Data envelopment analysis (DEA)
- Diseño de rutas óptimas de vehículos
- Fenómenos de espera. Teoría de colas y simulación
- Relaciones con la minería de datos
- Modelización y optimización de problemas de grandes dimensiones
- Optimización estocástica
- Optimización estructurada. Interacciones con la geometría
- Optimización global
- Optimización lineal entera
- Optimización no lineal y optimización nolineal entera-mixta
- Optimización multiobjetivo y decisión multicriterio
- Problemas combinatorios difíciles y optimización heurística
- Problemas de localización

- Programación semi-infinita. Estabilidad y mal-condicionamiento en optimización
- Teoría de juegos.

1.4.2. La Toma de Decisiones Multicriterio

Obviamente, la toma de decisiones es tan antigua como el propio ser humano, por lo que es tarea imposible establecer su origen. Sin embargo, se puede bucear en la literatura escrita para encontrar los primeros intentos de formalizar métodos de toma de decisiones. Greco et al. (2016) mencionan las primeras discusiones de filósofos como Aristóteles, Platón y Santo Tomás de Aquino sobre la capacidad del ser humano para decidir, y establecen dos antecedentes como, quizás, las primeras metodologías publicadas sobre cómo tomar decisiones:

- **San Ignacio de Loyola** (1491-1556) dejó escrito en sus *Ejercicios Espirituales*, según se menciona en Fortemps y Slowinski (2002), un método consistente en considerar las ventajas de aceptar la propuesta y luego las desventajas. De la misma forma, considerar las ventajas y las desventajas de no aceptarla. A la vista de estas consideraciones, ver hacia dónde se inclina la razón para tomar la decisión.
- **Benjamin Franklin** (1706-1790) describió en una carta a su amigo Joseph Prestley (MacCrimmon, 1973) un método completo para tomar una decisión. Consiste en dividir una hoja de papel en dos columnas, colocando en una las ventajas y en otra los incovenientes de la alternativa. Posteriormente, se tachan elementos (o grupos de elementos) que tengan la misma importancia. Se decide finalmente la columna que queda cuando la otra se ha tachado por completo.

A pesar de estos antecedentes, la Toma de Decisiones Multicriterio es una disciplina relativamente joven, que surje, como indica Bilbao (2017) de las interacciones de dos disciplinas: Matemáticas y Economía. Se puede decir que el origen de la toma de decisiones multicriterio se sitúa en el ámbito de los estudios políticos sobre agregación de preferencias y votaciones llevados a cabo a finales del siglo XVIII por Jean-Charles de Borda y el Marqués de Condorcet. Posteriormente, a finales del siglo XIX toman el relevo insignes economistas como Antoine A. Cournot y Leon Walras, que analizan los conceptos de conflicto y equilibrio, y Wilfredo Pareto (Figura 1.4), que define el concepto de eficiencia u optimalidad: en una comunidad de individuos, se alcanza un máximo de bienestar si ninguno de ellos puede mejorar su situación sin reducir el bienestar de otro. Este concepto dará lugar al de solución eficiente u óptimo de Pareto en MCDM.

Más tarde, a raíz del impulso que experimenta la Investigación Operativa durante la Segunda Guerra Mundial, confluyen los estudios económicos y matemáticos, con trabajos como los de Paul Samuelson sobre la aplicación de la programación lineal al análisis económico, Tjalling Koopmans, que introduce el concepto

Figura 1.4: Wilfredo Pareto

de vector eficiente, John von Noemann, con sus trabajos en Teoría de Juegos, y Harold Kuhn y Albert Tucker, que formulan las condiciones de optimalidad para problemas no lineales y para la existencia de soluciones eficientes en problemas multiobjetivo. Además, en 1955, Charnes, Cooper y Ferguson publican el trabajo precursor de la Programación por Metas (Charnes et al., 1955).

En el año 1970 tuvo lugar en La Haya (Países Bajos), con motivo de la celebración del VII Congreso de Programación Matemática, el primer encuentro científico cuyo principal tema a tratar era el análisis multicriterio. En él, se presentó por primera vez el método ELECTRE (Roy, 1968), y los primeros métodos interactivos (Benayoun et al., 1971; Geoffrion et al., 1972). Estas ideas pioneras presentadas por diversos investigadores, culminaron en 1972 con la celebración, en la Universidad de Columbia, de la I Conferencia Mundial sobre Toma de Decisiones Multicriterio. En esta conferencia se acordó constituir el Grupo Especial Interesado en Toma de Decisiones Multicriterio (Special Interest Group on Multiple Criteria Decision Making), que fue el precursor de la actual Sociedad Internacional de Toma de Decisiones Multicriterio (International Society on Multiple Criteria Decision Making[3]).

El MCDM en España surgió en la Universidad Politécnica de Madrid, con los trabajos del Profesor Enrique Ballesteros, y de su entonces doctorando, el ya mencionado Profesor Carlos Romero (Figura 1.5). Además, también destaca en esta misma institución el Profesor Sixto Ríos Insua, quién sería más tarde, en 1997, el primer coordinador del Grupo Español de Decisión Multicriterio, junto con el Profesor Rafael Caballero, de la Universidad de Málaga. Son también muy destacables los trabajos pioneros de la Profesora María Victoria Rodríguez Uría, de la Universidad de Oviedo, y del profesor Francisco Ramón Fernández, de la Universidad de Sevilla.

España es actualmente el 4º país en número de miembros (119 de 2.293) de la Sociedad Internacional de Decisión Multicriterio, y en un estudio bibliométrico de la propia sociedad, realizado en 2007, se colocaba como el 9º país a nivel mun-

[3] www.mcdmsociety.org

Figura 1.5: Carlos Romero, principal investigador español en MCDM

dial en número de publicaciones en revistas de impacto[4]. Actualmente, el Grupo Español de Decisión Multicriterio cuenta con 242 miembros de 31 universidades y centros de investigación (algunos extranjeros), agrupados en 30 nodos. Hasta donde yo sé, la Universidad de Málaga cuenta actualmente con tres grupos de investigación dedicados al MCDM, liderados por los profesores Rafael Caballero, Enrique Alba y Mariano Luque.

[4]www.mcdmsociety.org/content/bibliometric-analysis

Capítulo 2

¿Cómo resolver? Técnicas de Decisión Multicriterio

Volvamos pues a mis decisiones sobre la estructura y contenido de esta lección inaugural. En este capítulo, daré las ideas básicas de las técnicas multicriterio más utilizadas en la práctica, para dos grandes tipos de problemas. Los problemas discretos son aquellos en los que hay un número finito, y asumible por el decisor, de alternativas. Digo asumible por el decisor porque existen problemas (sobre todo derivados del uso de variables enteras o binarias) que, aún teniendo un número finito del alternativas, éstas son tan numerosas o tan difíciles de caracterizar que su tratamiento mediante técnicas discretas es imposible. Por otro lado, los problemas continuos suelen tener un número infinito (o muy elevado) de alternativas, caracterizadas a través de variables de decisión y restricciones sobre éstas. Haremos un recorrido a través de los distintos bloques de técnicas de cada tipo, utilizando dos ejemplos de decisiones sobre la lección.

Antes, sin embargo, conviene hacer alguna consideración sobre los procesos científicos de toma de decisiones. Budnick et al. (1988) organizan el proceso completo de toma de decisiones basada en la investigación operativa en 8 pasos, subdivididos a la vez en tres etapas (Figura 2.1). La siguiente enumeración es una transcripción literal de la descripción citada:

1. **Etapa de pre-modelización**. Consta de dos pasos:

    a) ***Percepción de una necesidad***. Percepción, por parte del decisor, de que se necesita llevar a cabo alguna acción, o de que alguna acción tiene que realizarse mejor.

    b) ***Formulación del problema***. Traslación de la necesidad percibida a un establecimiento específico de dicha necesidad, y de los criterios mediante los que se juzgará la solución del problema.

2. **Etapa de modelización**. Consta de cuatro pasos:

a) ***Construcción del modelo***. Construcción de una representación matemática del problema.

b) ***Recogida de datos***. Recolección de los elementos específicos del modelo, que caracterizan las condiciones actuales del problema.

c) ***Resolución del modelo***. Manipulación matemática de los datos de entrada para producir unos resultados.

d) ***Validación y sensibilidad***. Testeo de los resultados del modelo para garantizar su validez, y determinar las implicaciones de posibles errores al estimar los datos de entrada.

3. **Etapa de implementación**. Consta de dos pasos:

a) ***Interpretación de los resultados***. Volver a examinar cuidadosamente los criterios del problema a la luz de los resultados del modelo.

b) ***Implementación y control***. Análisis de los cambios tecnológicos y de comportamiento requeridos, en el corto y en el largo plazo.

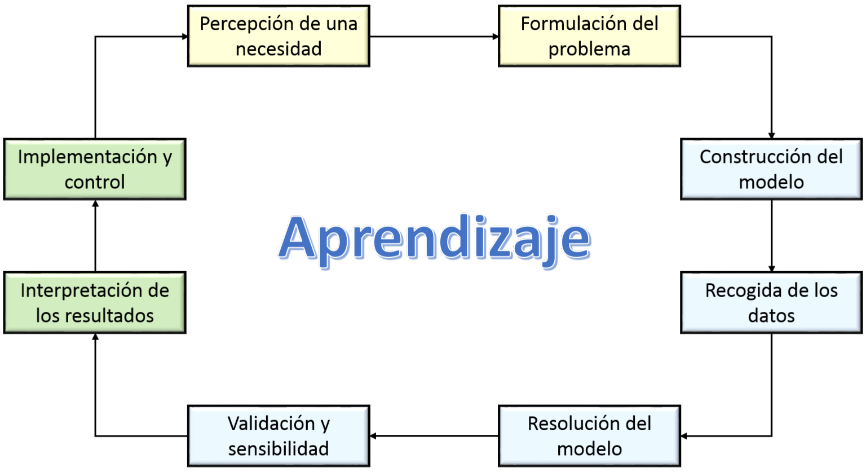


Figura 2.1: Fases en el proceso de toma de decisiones

Fuente: Elaboración propia a partir de Budnick et al. (1988)

El circuito que muestra la Figura 2.1 está cerrado porque, en la mayoría de los procesos reales de decisión, el proceso no termina al culminar el octavo paso, sino que la primera resolución suele conducir a una reconsideración de todos los elementos (decisionales, técnicos, del modelo) para ajustarlos mejor al problema que se desea resolver. Y no sólo me refiero al perfeccionamiento del modelo matemático por parte del analista, sino también (en ocasiones) a la reconsideración por parte del decisor de sus propias preferencias y de sus criterios. Permítaseme citar aquí una anécdota que sucedió en el desarrollo de un trabajo. Se trataba de hacer un estudio teórico sobre los sistemas de generación de energía eléctrica en

Andalucía. El decisor nos comunicó que sus criterios eran el coste y una serie de criterios ambientales clasificados en diversas categorías de impacto. Tras obtener una primera solución, el decisor observó que la energía solar fotovoltaica no estaba entre las fuentes elegidas. Le justificamos, en virtud de los elementos del modelo, el porqué de esta ausencia. Y nos dijo:

- *"Pues tiene que estar."*

- *"¿Por qué?"*, preguntamos nosotros.

- *"Hombre, porque sol, tenemos"*, contestó él.

Ese *"porque sol, tenemos"*, se trata en realidad de otro criterio, que podemos denominar, vulnerabilidad o dependencia de combustible (entiéndase éste en sentido amplio) importado, que el decisor tenía, pero del que no era consciente a la hora de modelizar el problema. Es la primera resolución la que hace aflorar este criterio, hasta entonces oculto. Por eso quiero insistir en dos aspectos fundamentales, a la hora de resolver problemas de decisión con el apoyo de las matemáticas. En primer lugar, como muy acertadamente indica Taha (2004), la Investigación Operativa es *"más que sólo matemáticas... Las soluciones tienen su base en las personas, y no en la tecnología. Toda solución que no tenga en cuenta el comportamiento humano, probablemente fallará"*. En segundo lugar, o tal vez como consecuencia de lo anterior, la toma de decisiones multicriterio tiene lugar en un entorno permanente de aprendizaje, por parte de todos los agentes implicados en el proceso. Termino esta disquisición con una frase de mi compañero el profesor Enrique Navarro, de la Facultad de Turismo de la UMA, cuando, la primera vez que trabajamos juntos, al estar modelizando su problema, nos dijo: *"nos estáis haciendo pensar en cosas en las que no habíamos pensado nunca"*. Es la síntesis perfecta de cómo el tratamiento matemático de los problemas propicia (y prácticamente lo impone) el aprendizaje.

A continuación, paso a realizar una somera descripción de las técnicas clásicas de análisis multicriterio. Aunque el proceso descrito en la Figura 2.1 recoge todas los pasos de la toma de decisiones, su análisis global excede el ámbito de esta sección, que se centrará en los correspondientes a modelización y resolución del problema, es decir, los tres primeros pasos de la segunda etapa.

2.1. Problemas discretos

2.1.1. Alternativas y criterios. La matriz de evaluación

No se hable más, y pongamos manos a la obra. Mi primera decisión relativa a esta lección inaugural va a ser elegir un modelo base de lección, de entre las siguientes cinco alternativas, que tras un estudio de las distintas posibilidades, he seleccionado como las posibles decisiones:

- A_1: **Modelo formal y teórico**. Al fin y al cabo, se trata de matemáticas, y mis compañeros esperan de mí un riguroso tratado plagado de fórmulas, definiciones y teoremas. Esta alternativa iría en la línea del consejo de mis admirados Les Luthiers: *si no puedes convencerles, confúndeles*.

- A_2: **Modelo divulgativo**. Por el contrario, está la opción de una lección divulgativa, al alcance del gran público, no necesariamente versado en matemáticas, que convenza de la utilidad de la Toma de Decisiones Multicriterio a cualquier potencial usuario. O sea, algo que se pueda convertir fácilmente en un *tutorial* que se viralice rápidamente en las redes.

- A_3: **Modelo basado en competencias**. Dado que ésta es la primera lección del curso (al menos nominalmente, porque solemos inaugurar el curso una vez empezado), podemos seguir la metodología empleada en todas las demás, y hacer una exposición profundamente boloñesa basada en competencias. Vamos, lo ideal para enseñar a aprender.

- A_4: **Modelo políticamente comprometido**. Ya que estamos en una Universidad y el fomento del espíritu crítico es una de nuestras principales misiones, voy a volcar en la charla algunas de mis ideas políticas y de mis opiniones sobre los asuntos de la actualidad que nos preocupan. Material, hay.

- A_5: **Modelo mixto**. Finalmente, me planteo un modelo híbrido, que contenga algo de los cuatro modelos previamente definidos. Es una tarea complicada, pero puede dar buenos resultados...

Para tomar esta decisión, he decidido tener en cuenta los cinco criterios siguientes (el número de alternativas y de criterios no tiene, obviamente, por qué coincidir; es casualidad):

- C_1: **Contenido científico**. Obviamente, una lección inaugural debe contener una buena dosis de material científico, puesto suficientemente al día, que informe de las líneas y logros de investigación modernos en el ámbito que nos ocupa.

- C_2: **Amenidad**. No se trata de dormir a la audiencia. Bastante han tenido ya con la lectura de la memoria del curso pasado (a pesar del encomiable esfuerzo del Secretario General por hacerla lo más llevadera posible). Es importante que la lección sea amena.

- C_3: **Probabilidad de boicot democrático**. Este criterio merece una explicación. Si la lección contiene elementos políticos, y éstos no gustan en determinados ámbitos, corremos el riesgo de que un grupo de personas, tremendamente demócratas, entren en el salón de actos el día de la inauguración y me impidan hablar, al tiempo que me tachan de fascista. Este fenómeno se está dando con demasiada frecuencia en las aulas universitarias españolas, con la tolerancia incomprensible de las autoridades académicas. Aunque estoy seguro de que las de la UMA reaccionarían con más firmeza, es mejor minimizar el riesgo.

- C_4: **Tiempo de preparación**. Me han avisado a principios de julio, por lo que debo preparar esta lección durante el verano, y aspiro a tener algunas vacaciones, que parezca que soy funcionario. De forma que quiero minimizar también el tiempo de preparación de la lección.

- C_5: **Contenido social**. Finalmente, también me interesa que la lección contenga elementos de interés social, no propiamente científicos, porque al fin y al cabo, la Toma de Decisiones es parte fundamental de todo sistema social.

Una vez establecidos las alternativas y los criterios de mi decisión, la fase siguiente consiste en llevar a cabo la evaluación de cada una de las alternativas para cada uno de los criterios. Esta evaluación se recoge en la llamada *matriz de evaluación*, que se puede ver en la Figura 2.2.

		CRITERIOS				
		Contenido Científico	Amenidad	Prob. boicot democrático	Tiempo de preparación	Contenido social
		Minutos Max	Escala 1-10 Max	Porcentaje Min	Horas Min	Minutos Max
ALTERNATIVAS	Formal y teórica	25	2	10%	80	2
	Divulgativa	10	9	20%	90	15
	Basada en competencias	8	5	30%	130	5
	Políticamente comprometida	5	5	90%	60	20
	Modelo Mixto	15	7	30%	100	10

Figura 2.2: Matriz de evaluación del problema

Debajo de cada criterio, figura la escala en la que está medido, así como su sentido optimizador, es decir, si se quiere maximizar o minimizar. Así, decido medir el contenido científico de las lecciones en minutos, para lo cual he estimado que una lección formal y teórica contiene 25 minutos de contenido científico, una divulgativa 10 minutos, y así sucesivamente. Obviamente, esta evaluación debe provenir de datos que posea el centro decisor basados en experiencias previas suyas o de otros decisores. El sentido es de maximizar, porque queremos que la lección tenga el mayor contenido científico posible. Si sólo considerásemos este criterio para tomar la decisión, cualquier decisor elegiría la lección formal y teórica, siempre que estuviese de acuerdo con la forma en la que se ha medido. Sería por lo tanto un problema de optimización tradicional. Sin embargo, al considerar más criterios, la elección ya deja de ser obvia, y depende de cada decisor y de sus preferencias entre éstos. La amenidad se ha medido en una escala del 1 al 10, de forma que cuanta más puntuación tenga una alternativa, más amena es. Es importante observar que esta escala ya contiene elementos subjetivos. En efecto, no hay casi nada inocente en la matriz de pagos, por lo que hay que poner especial cuidado en que responda verdaderamente a las opiniones del decisor. De la misma forma, la probabilidad de boicot democrático se mide en porcentaje y se desea minimizarla, el tiempo previsto de preparación se mide en horas, y se desea minimizarlo también, y el contenido social se mide en minutos, de la misma forma que el científico, y se desea maximizarlo.

En la Figura 2.2, se han señalado en verde los mejores valores de cada criterio, y en rojo los peores. Como puede observarse, hay alternativas, como la formal y teórica y la políticamente comprometida, con valores muy extremos (ambas tienen los mejores valores posibles para dos criterios y los peores para otros dos), y otras con valores más intermedios.

2.1.2. Alternativas dominadas y eficientes

Antes de aplicar alguna de las técnicas para decidir qué opción es la más adecuada, cabría preguntarse si hay alguna alternativa que podamos desechar previamente. Es decir, ¿hay alguna alternativa que no elegiría ningún decisor (racional), fueren cuales fueren sus preferencias? Observemos las alternativas A_3 (Basada en competencias) y A_5 (Modelo mixto). Podemos observar en la matriz de evaluación de la Figura 2.2 que:

- A_5 es mejor que A_3 para el criterio C_1 (Contenido científico), ya que toman los valores 15 y 8, respectivamente.
- A_5 es mejor que A_3 para el criterio C_2 (Amenidad), con valores 7 y 5, respectivamente.
- A_5 y A_3 toman el mismo valor (30 %) para el criterio C_3 (Probabilidad de boicot democrático).
- A_5 es mejor que A_3 para el criterio C_4 (Tiempo de preparación), con valores 100 y 130, respectivamente.
- A_5 es mejor que A_3 para el criterio C_5 (Contenido Social), con valores 10 y 5, respectivamente.

Por lo tanto, decimos que la alternativa A_3 *está dominada* por la alternativa A_5, ya que esta última la mejora o iguala en todos los criterios. Por lo tanto, ningún decisor racional (que aceptase como válidos los criterios y sus correspondientes evalualuaciones) elegiría la alternativa A_3, ya que hay otra que es claramente mejor.

No existe, sin embargo, ninguna relación de dominación entre el resto de las alternativas. En este caso, decimos que A_1, A_2, A_4 y A_5 son *alternativas eficientes*, u *óptimos de Pareto*, del problema. Por lo tanto, en general se dice que una alternativa es eficiente si no existe ninguna otra que la mejore o iguale en todos los criterios (mejorándola estrictamente en al menos uno). Como se comentó en la Sección 1.4, esta definición es una adaptación de la definición de óptimo dada en su día por el economista italiano Wilfredo Pareto.

Como mi decisión en este caso consiste en elegir una única alternativa, puedo descartar la A_3 de mi análisis. Pero es importante ser cauto a la hora de eliminar alternativas dominadas. Hay que tener en cuenta que el hecho de que una alternativa sea dominada, significa simplemente que hay otra que, seguro, es mejor, pero no quiere decir que dicha alternativa dominada sea necesariamente una "mala" alternativa desde el punto de vista del decisor. De la misma manera, una alternativa eficiente no tiene porqué ser considerada como una "buena" alternativa por parte del decisor. Para ilustrar este comentario, podemos ver en la Figura 2.3 un ejemplo hipotético con las calificaciones de cuatro alumnos en las pruebas de selectividad de lengua y de matemáticas. Como puede observarse, el alumno A ha obtenido un 10 en lengua y un 0 en matemáticas, y el D un 10 en matemáticas y un 0 en lengua. El alumno B ha obtenido un 8 en cada asignatura, mientras que el C tiene un 7 en las dos. El alumno C está dominado por el B, mientras que A, B y D son eficientes. Eso no quiere decir, sin embargo, que C sea considerado un mal alumno, o que A o D sean considerados buenos alumnos. Probablemente, muchos (incluido yo) consideramos que C es mejor que A y que D (aunque, lamentablemente, ambos aprobarían la selectividad...) Si nuestra decisión fuese escoger a un único alumno, está claro que no escogeríamos a C porque B es mejor, pero si nuestra decisión es clasificarlos, no es correcto eliminar a C, que muy bien podría ser el segundo del ranking. De hecho, si el alumno B dejase de ser una opción (por ejemplo, porque elige otro grado), es muy probable que C pasase a ser la mejor opción.

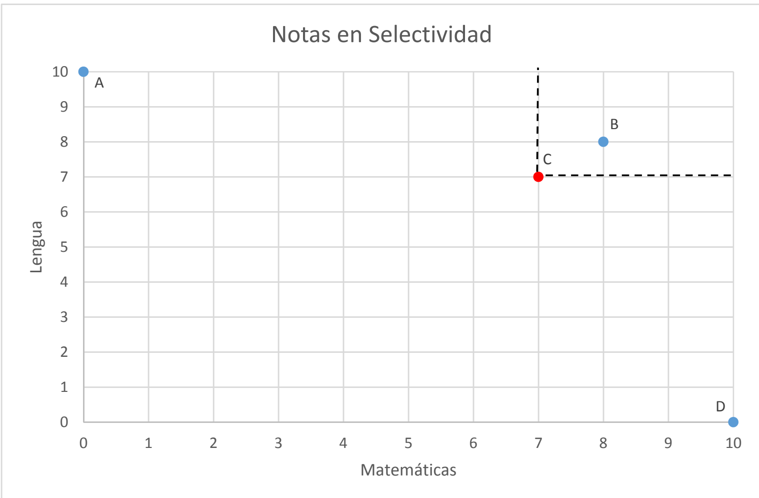


Figura 2.3: Calificaciones de 4 alumnos en Selectividad

Así pues, la eliminación o no de las alternativas dominadas depende de la finalidad última del estudio, e incluso si decidimos eliminarlas, habrá que plantearse volver a incluirlas si las alternativas que las dominan salen, por algún motivo, del problema. En mi problema de decisión, seguiré en la sección siguiente considerando la alternativa A_3, aunque sabemos que no será la elegida.

2.1.3. Métodos de resolución

Una vez detectadas y, en su caso, eliminadas, las alternativas dominadas, es necesario incluir de alguna forma las preferencias del decisor en el modelo, para ayudarle a elegir, de entre las alternativas eficientes, la que más se ajusta a dichas preferencias. En función de cómo se incorporan estas preferencias, y de la forma de caracterizar la mejor solución, hay distintos bloques de técnicas para este tipo de problemas. A continuación, daré las ideas más importantes, sin entrar en los detatalles, de los que se consideran como los tres enfoques principales: la teoría de la utilidad multiatributo, los métodos de superación y el proceso analítico jerárquico. Para encontrar una descripción más detallada de estos métodos, véase, por ejemplo, Pomerol y Barba-Romero (2000).

2.1.3.1. La Teoría de la Utilidad Multiatributo (MAUT)

La Teoría de la Utilidad Multiatributo fue desarrollada por los profesores Howard Raiffa y Ralph Keeney (Keeney y Raiffa, 1976), y aparece también descrita más tarde en Keeney (1992) (Figura 2.4).

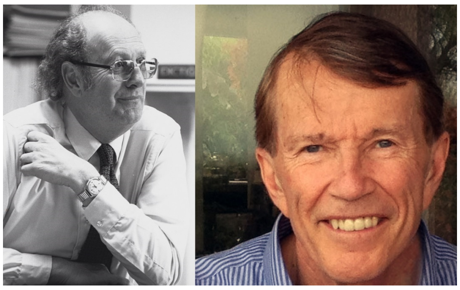
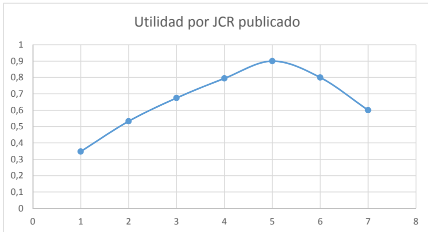


Figura 2.4: Howard Raiffa y Ralph Keeney

En general, esta metodología se basa en la construcción de una función que mida la utilidad global de cada una de las alternativas, de manera que éstas se ordenan en orden creciente del valor de la función. Para ello, es necesario en primer lugar construir una función de utilidad para cada criterio. Es interesante en este punto comentar que la utilidad que al decisor le reporta cada criterio no es necesariamente su valor, ni siquiera una función lineal de dicho valor. Para entender este punto, veamos un ejemplo. Supongamos que estoy midiendo la utilidad de publicar un número de artículos en revistas indexadas en el JCR, de cara a la obtención de mi próximo sexenio de investigación. Supongamos que en mi campo de investigación se exigen 5 artículos JCR para la concesión del sexenio. Si esto es así, mi utilidad de publicar artículos irá creciendo hasta el 5º, pero crecerá mucho menos (o incluso permanecerá constante) a partir del 6º, ya que no me produce utilidad adicional alguna de cara a la obtención del sexenio (Figura 2.5a). Es más, si nos encontramos próximos al final del periodo del sexenio, puede que incluso la utilidad decrezca al publicar artículos a partir del 6º (Figura 2.5b), ya que sería preferible que se publicaran más tarde (una vez iniciado el siguiente periodo). Claro, los incentivos incentivan a lo que incentivan. Si el objetivo del incentivo es que yo publique 5 artículos JCR, entonces está bien diseñado. Si su objetivo es, sin embargo, que yo publique el mayor número posible de artículos JCR, entonces está mal diseñado.

(a) Si el final del sexenio está lejos



(b) Si el final del sexenio está cerca

Figura 2.5: Funciones de utilidad de la publicación de artículos JCR

Una vez construídas las funciones de utilidad individuales de cada criterio, hay que construir una función de utilidad conjunta. Aunque habitualmente se utiliza un modelo aditivo, asignando un peso a cada criterio, también se pueden utilizar modelos multiplicativos o más complejos. La Teoría de Utilidad Multiatributo tiene buenas propiedades teóricas, en cuanto a la existencia y caracterización de las soluciones óptimas del decisor, pero puede ser una tarea complicada diseñar las distintas funciones de utilidad de forma que respondan fielmente a las preferencias del decisor. Por ello, se diseñan métodos basados en la metodología MAUT que contienen elementos que ayudan al decisor a obtener estas utilidades cardinales de forma consistente. Un buen ejemplo de ello es el método MACBETH (Bana e Costa y Vansnick, 1997).

2.1.3.2. Los Métodos de Superación

Este bloque de métodos intenta construir lo que denominamos *relaciones de superación* entre las distintas alternativas del problema. En general, se dice que una alternativa supera a otra si es al menos tan buena como ella en una mayoría de criterios, y no es notoriamente peor en los otros. Obviamente, la dificultad de los métodos (y las diferencias entre los distintos enfoques existentes) radica en cómo establecer y valorar numéricamente esos *en una mayoría de los criterios* y *notoriamente peor*. Los métodos de superación pioneros son los métodos ELECTRE (ELimination Et Choix Traduisant la Realité), diseñados por el Profesor Bernard Roy (Figura 2.6). La primera versión de ELECTRE apareció en Roy (1968), y posteriormente se han publicado varias versiones más.

Figura 2.6: Bernard Roy

Estos métodos se basan en establecer, para cada par de alternativas, un *coeficiente de concordancia*, que mide el número de criterios (ponderados con sus respectivos pesos) para los que la primera alternativa es al menos tan buena como la segunda, y un *coeficiente de discordancia*, que mide la máxima diferencia de utilidad entre la segunda y la primera. Posteriormente, el decisor fija un *umbral de concordancia* y un *umbral de discordancia*, de forma que una alternativa supera a otra si su coeficiente de concordancia está por encima de su umbral correspondiente, y el de discordancia está por debajo del suyo. Las versiones posteriores fueron añadiendo matizaciones y otros elementos a los ya citados.

Especialmente reseñable es la versión ELECTRE III (Roy, 1978), en la que se utiliza, por primera vez en estos métodos, el concepto de *pseudo-criterio*, que consiste en una matización de los criterios a través de la introducción de umbrales de indiferencia (diferencias de valores que son indiferentes para el decisor) y de preferencia estricta (diferencias a partir de las cuales una alternativa es claramente preferible a otra para el criterio considerado). Este concepto será utilizado posteriormente de forma muy extensa en los métodos PROMETHEE (Preference Ranking Organization METHod for Enrichment Evaluation), desarrollados por los profesores Jean-Pierre Brans y Philippe Vincke (Figura 2.7). La primera versión de los métodos PROMETHEE aparece en Brans et al. (1984). También en este caso se han publicado versiones posteriores (hasta la 5ª) de estos métodos.

Figura 2.7: Jean-Pierre Brans y Philippe Vincke

Aparte de los pseudocriterios, los métodos PROMETHEE se basan en la asignación de pesos a los criterios, y en la construcción de los llamados flujos de entrada y salida que miden, para cada alternativa, en qué grado son superadas (resp. superan) por el resto.

Las primeras versiones de ambas familias de métodos producían, en general, un *orden parcial* de las alternativas. Es decir, se establecen relaciones de superación, pero no necesariamente entre todos los pares de alternativas, de forma que existen alternativas que no son comparables entre sí. La Figura 2.8 presenta el orden parcial obtenido, para mis alternativas sobre el modelo de lección inaugural, con el método PROMETHEE[1].

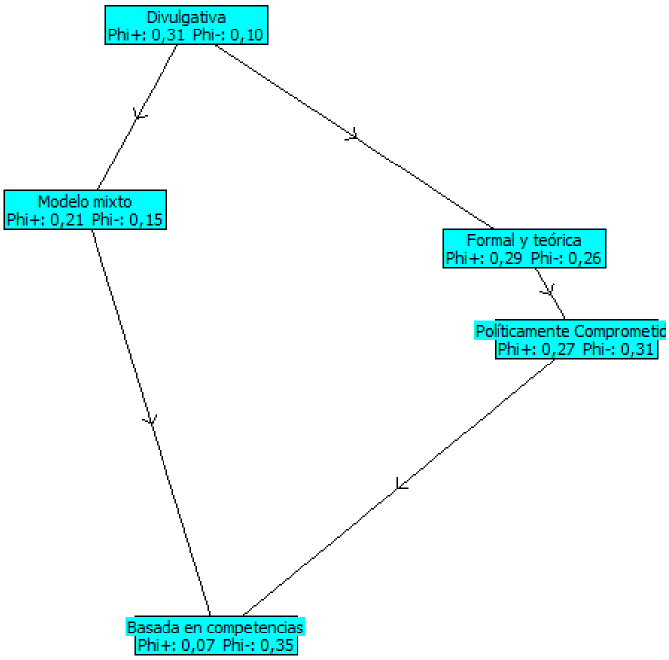


Figura 2.8: Orden parcial mediante PROMETHEE

Como se puede observar, la alternativa A_2 (Divulgativa) supera a todas las demás, pero sin embargo no se establece relación de dominación entre A_5 (Modelo mixto) y A_1 (Formal y Teórica), o entre A_5 y A_4 (Políticamente comprometida), aunque sí se establece que A_1 supera a A_4. Finalmente, la alternativa A_3 (Basada en competencias) es superada por todas las demás. Es posible forzar un poco la máquina de las relaciones, y conseguir un orden total de las alternativas, como se aprecia en la Figura 2.9. Obviamente, A_2 sigue siendo la mejor alternativa, pero ahora se establece que A_5 supera a A_1, quien a su vez supera a A_4.

De todas formas, la diferencia de valoración entre A_5 y A_1 es muy pequeña, por lo que hay que ser muy cautos al presentar esta relación al decisor. Con toda

[1]Se ha considerado el mismo peso para todos los criterios, y el pseudocriterio en "V", también para todos los criterios, con un umbral de preferencia estricta igual a la diferencia mayor que existe en la matriz de evaluación

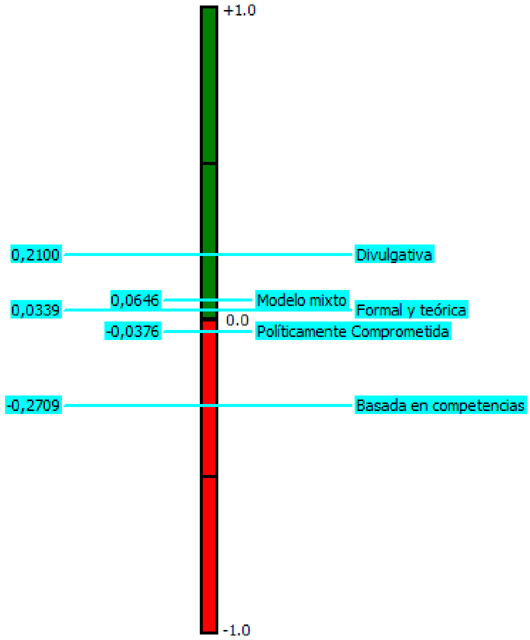


Figura 2.9: Orden total mediante PROMETHEE

seguridad, al realizar un análisis de sensibilidad sobre los parámetros utilizados en el modelo (por ejemplo, sobre los pesos asignados a los criterios), veríamos que ligeras variaciones en algunos harían variar el orden obtenido para estas dos alternativas[2]. Es importante proporcionar esta información al decisor para que pueda tomar sus decisiones con más conocimiento de causa.

2.1.3.3. El Proceso Analítico Jerárquico (AHP)

El Proceso Analítico Jerárquico (Analytic Hierarchy Process, AHP) fue propuesto por el profesor Thomas Saaty (Figura 2.10), y aparece publicado por primera vez en Saaty (1977). El método AHP se basa en dos ideas principales: la estructuración jerárquica de los criterios y alternativas (siendo posible introducir varios niveles en la jerarquía), y el sistema de comparación por pares.

Efectivamente, una vez estructurado el problema, el decisor procede a la comparación de las alternativas dos a dos para cada uno de los criterios, y también a la comparación de los criterios, dos a dos, entre sí. Dicha comparación se realiza en una escala, propuesta por el propio Saaty, del 1 (igualmente importantes) al 9 (absolutamente más importante). Posteriormente, emplea el método del *autovalor dominante* para proporcionar las valoraciones que son más consistentes con la transitividad (entendida de forma multiplicativa) de estas valoraciones (es decir, si a sobre b tiene una valoración de 3, y b sobre c tiene una de 5, a sobre c debería tener

[2]De hecho, incrementos alrededor del 5 % en los pesos de los criterios C_1, C_3 y C_4 ocasionan que A_1 adelante a A_5 en esta ordenación total

Figura 2.10: Thomas Saaty

una de $3 \cdot 5 = 15$. Además, el método AHP proporciona una medida de la consistencia de estas valoraciones por pares, que permite detectar posibles inconsistencias que el decisor puede volver a evaluar, si lo considera oportuno. Finalmente, es oportuno mencionar que existe una forma más general del método AHP, conocida como ANP (Analytic Network Process), que considera una estructura de red, en vez de una jerarquía (Saaty, 1996).

2.2. Problemas continuos

2.2.1. Planteamiento y elementos de un problema continuo

He tomado, pues, mi primera decisión, y me he inclinado por una lección divulgativa. Esta lección debe constar, a mi juicio, de cuatro secciones: una introducción, en la que se establecen los principales elementos de la Toma de Decisiones Multicriterio, una dedicada a una somera descripción de las distintas técnicas multicriterio que existen, otra en la que se comentan algunas aplicaciones reales del MCDM, y una última de conclusiones. Por otro lado, me han comentado desde el departamento de Protocolo de la Universidad de Málaga que la exposición de la lección durante el Acto de Apertura del curso académico debe durar una media hora. Así pues, debo tomar ahora una segunda decisión: ¿cómo repartir el tiempo disponible entre las cuatro secciones de la lección? Nótese que este problema es esencialmente distinto del anterior. En la Sección 2.1, teníamos cinco alternativas entre las que elegir, por lo que el problema se planteaba con una enumeración de las mismas, y la evaluación de cada uno de los criterios para cada una de las alternativas (matriz de evaluación). Sin embargo, ahora hay infinitas alternativas: las infinitas formas de repartir 30 minutos entre 4 secciones. Estamos pues ante lo que llamamos un problema continuo, o problema de Programación Multiobjetivo. Su modelización se lleva a cabo a través de lo que denominamos *variables de decisión*, *restricciones* y *funciones objetivo*, de forma análoga a los problemas de optimización (programación matemática) tradicionales, pero con más de un objetivo. Pasemos ahora a describir estos elementos para mi decisión sobre los tiempos de la exposición.

2.2.1.1. Variables de decisión

En lugar de alternativas, ahora tenemos variables de decisión, que pueden tomar, en general, infinitos valores. Estas variables son los elementos cuyo valor constituye la decisión a tomar. En mi caso, como debo determinar el tiempo dedicado a cada una de las cuatro secciones, tengo cuatro variables de decisión:

- I: minutos dedicados a la introducción,
- T: minutos dedicados a la descripción de las técnicas,
- A: minutos dedicados a comentar las aplicaciones reales,
- C: minutos dedicados a las conclusiones.

En principio, estas cuatro variables pueden tomar infinitos valores positivos cada una. Es decir, nuestras alternativas son combinaciones de cuatro valores reales positivos $(I, T, A, C) \in \mathbb{R}^{4+}$.

2.2.1.2. Restricciones

Sin embargo, no cualquier combinación de valores para estas variables es admisible (factible) para el problema. El conjunto de valores posibles para estas variables es lo que denominamos *conjunto factible* o *conjunto de oportunidades*, y lo definimos a través de una serie de relaciones matemáticas entre las variables, que denominamos restricciones. En nuestro caso, decido establecer las siguientes restricciones (además de las ya mencionadas condiciones de no negatividad sobre las variables):

- **Tiempo disponible**. La exposición no debe durar más de 30 minutos. La expresión matemática de esta restricción es la siguiente:

$$I + T + A + C \leq 30 \tag{2.1}$$

- **Amenidad**. Me preocupa especialmente la amenidad de la exposición, por lo que establezco que ésta no debe tener más de 15 minutos aburridos. Basándome en la experiencia adquirida en anteriores exposiciones, estimo que un 30 % de la introducción es aburrida, así como un 70 % de la exposición de las técnicas, un 10 % de la sección de aplicaciones y un 40 % de las conclusiones. Así pues, esta restricción se corresponde con la siguiente expresión matemática:

$$0{,}3I + 0{,}7T + 0{,}1A + 0{,}4C \leq 15 \tag{2.2}$$

Por lo tanto, el conjunto factible del problema está determinado por todas las combinaciones de cuatro valores no negativos que satisfacen las dos restricciones anteriores. Matemáticamente, si llamo X al conjunto factible, entonces

$$\begin{aligned} X = \{(I, T, A, C) \in \mathbb{R}/ \\ I + T + A + C \leq 30; \\ 0{,}3I + 0{,}7T + 0{,}1A + 0{,}4C \leq 15; \\ I, T, A, C \geq 0\} \end{aligned} \quad (2.3)$$

La combinación de variables de decisión y restricciones es lo que ahora determina las alternativas del problema. Por lo tanto, como se puede observar, la modelización de problemas continuos es más complicada que la de los problemas discretos.

2.2.1.3. Funciones objetivo

Para concluir con el planteamiento del problema, nos resta establecer los criterios con respecto a los cuales deseamos tomar la decisión. En mi caso, deseo maximizar tanto el contenido teórico de la lección, como su contenido práctico. De forma análoga a la restricción de amenidad, la Tabla 2.1 muestra los porcentajes estimados de contenidos teórico y práctico de cada una de las secciones. Como se puede observar, los porcentajes no tienen por qué sumar 100 %. En este caso, estimo que tanto el apartado de Aplicaciones como el de Conclusiones, contienen otros elementos aparte de los propiamente teóricos y prácticos de la lección.

Contenido	**I**	**T**	**A**	**C**
Teórico	30 %	80 %	30 %	40 %
Práctico	70 %	20 %	50 %	10 %

Tabla 2.1: Contenidos teórico y práctico de las secciones

Por lo tanto, la formalización matemática de los criterios, que es lo que denominamos funciones objetivo, es la siguiente:

- **Contenido teórico**. Deseamos maximizar la siguiente función de las variables de decisión:

$$CT(I, T, A, C) = 0{,}3I + 0{,}8T + 0{,}3A + 0{,}4C \quad (2.4)$$

- **Contenido práctico**. Deseamos maximizar la siguiente función de las variables de decisión:

$$CP(I, T, A, C) = 0{,}7I + 0{,}2T + 0{,}5A + 0{,}1C \quad (2.5)$$

Finalmente, podemos escribir todos estos elementos de forma conjunta, dando lugar al planteamiento matemático de nuestro problema multiobjetivo para decidir la distribución del tiempo entre las secciones de la lección:

$$(PMO) \begin{cases} \text{max} & CT(I,T,A,C) = 0{,}3I + 0{,}8T + 0{,}3A + 0{,}4C \\ \text{max} & CP(I,T,A,C) = 0{,}7I + 0{,}2T + 0{,}5A + 0{,}1C \\ \text{sujeto a:} & \\ & I + T + A + C \leq 30 \\ & 0{,}3I + 0{,}7T + 0{,}1A + 0{,}4C \leq 15; \\ & I,T,A,C \geq 0 \end{cases} \tag{2.6}$$

Antes de pasar a la resolución del problema, es importante hacer un comentario. Si resolvemos el modelo (PMO) de la expresión (2.6), nos vamos a encontrar con los siguientes efectos no deseados:

- En cualquiera de las soluciones obtenidas mediante los distintos métodos de resolución que se comentarán más abajo, siempre se obtiene $C = 0$, es decir, no se dedica ningún tiempo a las conclusiones.
- En alguna de las soluciones, los tiempos son muy bajos para otras secciones. Es decir, podemos obtener soluciones que nos digan que dediquemos 12 segundos a la introducción.

Estos tipos de soluciones, realmente, no son admisibles para mí. Quiero que haya una sección de conclusiones, y desde luego, destinar 12 segundos a cualquier sección es absurdo. Estas soluciones se obtienen porque hemos modelizado mal el problema. Es decir, los modelos matemáticos son, a priori, ignorantes, y hay que decirles todo, por trivial que nos parezca. Todo esto forma parte del proceso de aprendizaje que recogíamos en la Figura 2.1, al principio de este capítulo. Es muy frecuente tener que volver sobre la modelización una vez que aparecen las primeras soluciones del problema. En nuestro caso, decido añadir restricciones adicionales que aseguren un tiempo mínimo a cada sección[3]. Obviamente, se puede establecer duraciones mínimas distintas según la sección (sería más lógico), pero por simplificar, impondremos aquí una duración mínima de 5 minutos a todas ellas:

- **Duraciones mínimas**. Cada sección debe durar, al menos, 5 minutos:

$$I,T,A,C \geq 5 \tag{2.7}$$

[3]En realidad, cualquier lector iniciado en la modelización matemática podrá observar que el primer error puede residir en la linealidad del modelo. Obviamente, es muy discutible que el aburrimiento, el contenido teórico o el práctico sean, en realidad, proporcionales a la duración de cada sección, o que, por ejemplo, el aburrimiento acumulado en las secciones previas no influya en el de la sección posterior. Para la finalidad de esta lección inaugural, he considerado que no era conveniente complicar el modelo, por lo que he recurrido a esta simplificación. El carácter lineal del modelo también incide en la estructura de las soluciones, en función del número de variables y restricciones, lo que determina, por ejemplo, la existencia de variables nulas en las soluciones del modelo (2.6).

Como puede observarse, estas restricciones hacen redundantes las originales de no negatividad, por lo que podemos sustituir unas por otras en nuestro modelo, que queda ahora como sigue:

$$(PMO)\begin{cases} \text{max} \quad CT(I,T,A,C) = 0{,}3I + 0{,}8T + 0{,}3A + 0{,}4C \\ \text{max} \quad CP(I,T,A,C) = 0{,}7I + 0{,}2T + 0{,}5A + 0{,}1C \\ \text{sujeto a:} \\ \qquad I + T + A + C \leq 30 \\ \qquad 0{,}3I + 0{,}7T + 0{,}1A + 0{,}4C \leq 15; \\ \qquad I,T,A,C \geq 5 \end{cases} \tag{2.8}$$

Y es que, aunque los modelos matemáticos son, como he dicho antes, ignorantes, lo cierto es que tienen un enorme potencial de aprendizaje. Me gusta incidir en este concepto porque, como ya se ha comentado anteriormente, los procesos de aprendizaje son fundamentales en la toma de decisiones multicriterio, y de hecho, es sólo este proceso efectivo de aprendizaje lo que hará que decisor y analista puedan confiar en la solución obtenida finalmente (Belton et al., 2008).

2.2.2. Ideales, matriz de pagos y conjunto eficiente

El primer paso que debemos dar, una vez planteado el problema multiobjetivo, es determinar qué es lo mejor que podemos lograr para cada uno de los objetivos, independientemente de los demás. Así pues, utilizando técnicas de optimización tradicionales, es decir, para problemas con una única función objetivo, obtenemos las soluciones que maximizan por separado cada uno de nuestros dos objetivos:

- **Máximo contenido teórico**. Al maximizar nuestra primera función objetivo, obtenemos que para incluir el máximo contenido teórico posible, debemos destinar:

    - 5 minutos a la introducción,
    - 15 minutos a las técnicas,
    - 5 minutos a las aplicaciones,
    - 5 minutos a las conclusiones.

  Es decir, destinamos el tiempo mínimo establecido a la introducción, aplicaciones y conclusiones, y el resto del tiempo disponible va todo a las técnicas. Con ello, obtenemos un contenido teórico total de 17 minutos. Este tiempo es, dadas las restricciones impuestas al modelo, el tiempo máximo posible de contenido teórico que puede tener la lección. Además, evaluando la función de contenido práctico en esta solución, se obtiene que si dedicamos estos tiempos a las secciones, el contenido práctico sería de 9.5 minutos.

- **Máximo contenido práctico**. Al maximizar nuestra segunda función objetivo, obtenemos que para incluir el máximo contenido práctico posible, debemos destinar:
  - 15 minutos a la introducción,
  - 5 minutos a las técnicas,
  - 5 minutos a las aplicaciones,
  - 5 minutos a las conclusiones.

  Es decir, destinamos el tiempo mínimo establecido a las técnicas, aplicaciones y conclusiones, y el resto del tiempo disponible va todo a la introducción. Con ello, obtenemos un contenido práctico total de 14.5 minutos. Este tiempo es, dadas las restricciones impuestas al modelo, el tiempo máximo posible de contenido práctico que puede tener la lección. Además, evaluando la función de contenido teórico en esta solución, se obtiene que si dedicamos estos tiempos a las secciones, el contenido teórico sería de 12 minutos.

Por tanto, los mejores tiempos que podemos conseguir, denominados *valores ideales*, son 17 minutos para el contenido teórico y 14.5 para el contenido práctico. Obviamente, estos valores ideales no se pueden lograr simultáneamente para las dos funciones con ninguna combinación factible de tiempos. Cuanto mejor sea una de las funciones, peor será la otra. Los valores obtenidos para las funciones objetivo en las dos optimizaciones previas los podemos reflejar en una matriz que denominamos *matriz de pagos* del problema (Tabla 2.2). La matriz de pagos nos proporciona una primera información sobre el grado de conflicto que existe entre los criterios y de las tasas de intercambio (tradeoffs) entre ellos. También nos proporciona información sobre los rangos de valores que pueden tomar los distintos objetivos en el conjunto eficiente (conjunto formado por todas las soluciones eficientes del problema)[4]. Es decir, en nuestro caso, el contenido teórico se moverá entre 12 y 17 minutos, y el práctico entre 9.5 y 14.5 minutos. Cuanto más cerca esté la solución del extremo de la derecha (el ideal) de uno de los dos intervalos, más cerca estará del extremo de la izquierda (peor valor) del otro.

	Cont. Teórico	**Cont. Práctico**
Opt 1	17	9.5
Opt 2	12	14.5

Tabla 2.2: Matriz de Pagos

En este problema con dos funciones objetivo, es interesante observar la representación gráfica de la Figura 2.11. En ella aparecen las combinaciones factibles

[4]En este problema, los valores obtenidos son el rango de variación exacto de las funciones. En otros problemas más complejos, estos valores son sólo una aproximación

en el espacio de objetivos, es decir, los tiempos de contenido teórico y práctico que pueden tomar simultáneamente las distintas combinaciones factibles de tiempo del problema. Se ha representado el contenido teórico en el eje horizontal (por tanto, cuanto más a la derecha, mayor contenido teórico y cuanto más a la izquierda, menos) y el contenido práctico en el eje vertical (por tanto, cuanto más arriba, mayor contenido práctico y cuanto más abajo, menos). Todas las combinaciones de tiempo que aparecen en la zona azul son factibles. Es decir, para alguna distribución factible de tiempos entre las secciones se puede conseguir, por ejemplo, un contenido práctico de 13 minutos, y uno teórico de 11, pero no es posible conseguir, por ejemplo, un contenido práctico de 14 minutos y uno teórico de 13.

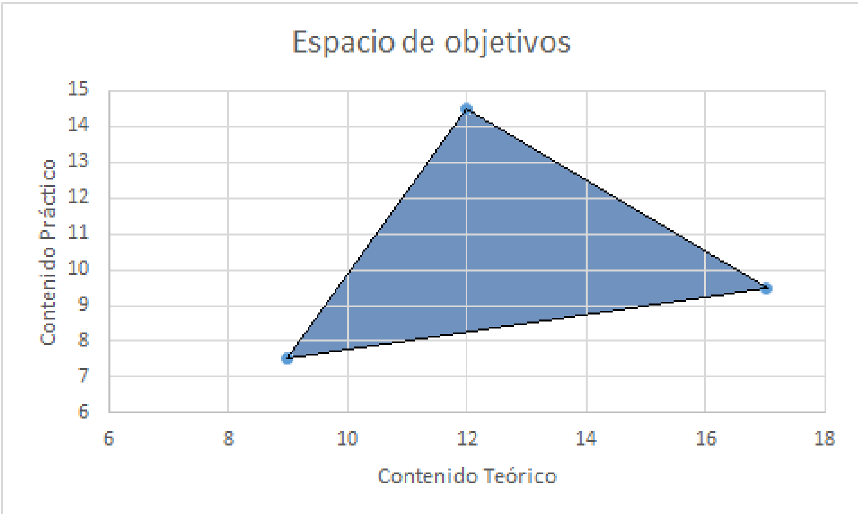
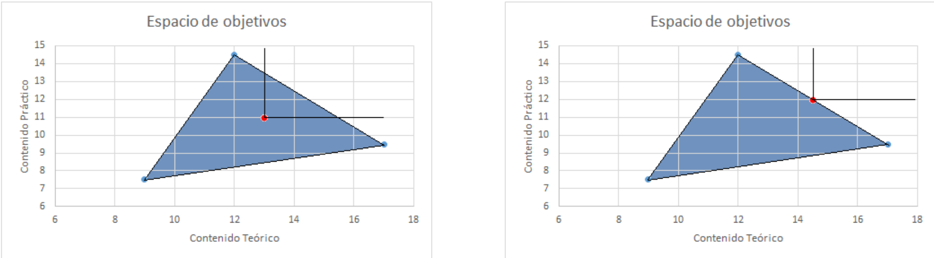


Figura 2.11: Espacio de objetivos

Cuando es posible hacer esta representación en el espacio de objetivos, es fácil detectar gráficamente las soluciones dominadas y eficientes (Figura 2.12). Por ejemplo, observemos la combinación de tiempos (13,11). Como se puede observar en la Figura 2.12a, hay soluciones factibles que mejoran el contenido teórico (están más a la derecha) y el contenido práctico (están más arriba). Así pues, la combinación de tiempos (13,11) está dominada (por todas las soluciones que aparecen en la parte factible del cuadrante dibujado en la figura.

Por el contrario, podemos ver que la combinación (14.5, 12) es eficiente, ya que no es posible mejorar los dos objetivos a la vez, es decir, no hay soluciones factibles en el correspondiente cuadrante (Figura 2.12b). Por lo tanto, podemos deducir que el conjunto eficiente es la frontera noreste del conjunto factible, es decir, el segmento resaltado en verde en la Figura 2.13. Como se puede observar, los extremos del segmento son, precisamente, las combinaciones de tiempo que obtuvimos al calcular los valores ideales del problema: (17, 9.5) y (12, 14.5).

Lamentablemente, el conjunto eficiente no siempre tiene una forma tan sencilla. Incluso en problemas como éste, lineales con dos objetivos, puede estar for-



(a) Solución dominada (b) Solución eficiente

Figura 2.12: Soluciones dominadas y eficientes en un problema continuo

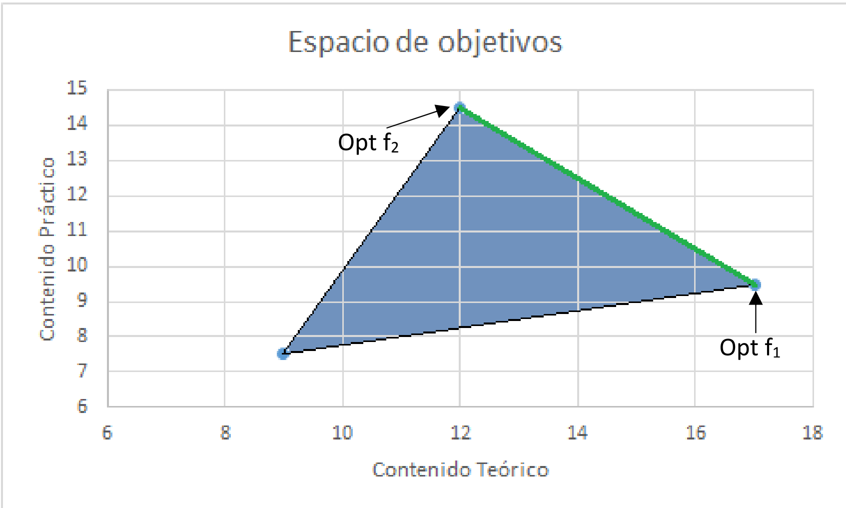


Figura 2.13: Conjunto eficiente

mado por varios segmentos, y en problemas más complejos, puede incluso estar formado por trozos disconexos. Además, obviamente, su caracterización gráfica no es en general tan sencilla (cuando es posible obtenerla, porque para problemas con más de tres objetivos ya no lo es). Por lo tanto, como veremos a continuación, en muchos casos hay que aplicar métodos multiobjetivo para obtener una aproximación fiable del conjunto eficiente.

En este sencillo ejemplo, es además posible determinar a qué valores de las variables de decisión corresponden las soluciones eficientes de la Figura 2.13. Como cabe esperar de lo obtenido al calcular los ideales, las distribuciones eficientes de tiempos son todas aquellas en las que las aplicaciones y conclusiones duran ambas 5 minutos, mientras que los tiempos dedicados a la introducción y las técnicas se mueven entre 5 y 15 minutos. Por tanto, con 10 minutos dedicados a aplicaciones y conclusiones, las distintas distribuciones de los 20 minutos restantes entre la introducción y las técnicas van a determinar los valores que se consiguen para los objetivos. Éstas son conclusiones interesantes que se obtienen del análisis de las soluciones eficientes del problema.

2.2.3. Métodos de resolución

Al igual que se hizo en la Sección 2.1 para los métodos discretos, vamos a dar aquí una serie de ideas básicas sobre los distintos bloques de métodos de programación multiobjetivo que se pueden encontrar. Para más detalles, el lector puede consultar alguno de los libros clásicos sobre la materia (Zeleny, 1982; Yu, 1985; Steuer, 1986), o el más reciente Miettinen (1999), más centrado en problemas no lineales. En general, los métodos para resolver estos problemas se dividen en tres grandes bloques, dependiendo del momento del proceso en el que el decisor proporciona información sobre sus preferencias: *métodos a posteriori*, *métodos a priori* y *métodos interactivos*.

2.2.3.1. Métodos a posteriori

En estos métodos, los analistas resuelven el problema sin ningún tipo de información preferencial previa por parte del decisor. Se trata, por tanto, de generar el conjunto eficiente del problema, o una aproximación tan buena como sea posible del mismo, que se presenta posteriormente al decisor para que elija entre las soluciones eficientes la que prefiera. En la práctica, hoy en día este tipo de métodos se suelen usar como una fase previa de aprendizaje, para que el decisor tome conciencia, como vimos anteriormente, de los rangos de variación de los objetivos y los tradeoffs entre ellos en el conjunto eficiente. A la luz de esta información, es más fácil proporcionar la información preferencial requerida por otros que veremos más adelante. Los métodos más tradicionales pertenecientes a este bloque son:

- **Método de las ponderaciones**. Aunque Gass y Saaty (1955) publicaron una versión previa, se suele coincidir en que fue el profesor Lofti Zadeh (Figura 2.14a) quién publicó la primera versión de este método para problemas con más de un objetivo (Zadeh, 1963). El método se basa en asignar pesos no negativos a cada una de las funciones objetivos (habitualmente, que sumen 1), y optimizar la suma ponderada de todas ellas. Bajo condiciones no muy restrictivas, se demuestra que la solución obtenida es eficiente para el problema multiobjetivo original. Es importante tener en cuenta que estos pesos no responden a opiniones preferenciales de decisor. Son parámetros instrumentales, y se trata de variarlos, recorriendo de forma bien distribuida todo el espacio de pesos, para obtener un número suficiente de soluciones eficientes. El método de las ponderaciones funciona correctamente para problemas convexos, pero en los problemas no convexos pueden aparecer lo que denominamos *soluciones eficiente no soportadas*: soluciones eficientes que no se pueden obtener mediante el método de las ponderaciones para ninguna combinación de pesos.

- **Método de la ε-restricción**. Este método fue desarrollado por el profesor Yacob Haimes (Figura 2.14b) y su equipo, y aparece publicado por primera vez en Haimes et al. (1971). En este método, se escoge una función para optimizarla, y al resto se le asignan cotas y pasan a ser restricciones del problema. Nuevamente, se puede demostrar que, bajo condiciones poco exigentes, las soluciones así obtenidas son eficientes para el problema original. Se trata, por tanto, de obtener una aproximación del conjunto eficiente a base de cambiar las cotas sobre las funciones, así como la función que se optimiza. Una posible desventaja del método de la ε-restricción es que, en problemas con tres o más objetivos, las cotas elegidas pueden ser incompatibles entre sí, dando lugar a problemas sin puntos factibles.

(a) Lofti Zadeh (b) Yacob Y. Haimes

Figura 2.14: Creadores de métodos a posteriori clásicos

- **Algoritmos multiobjetivo evolutivos (EMO)**. La creciente complejidad de los problemas reales que se pretenden resolver ha hecho imposible, en muchos casos, su tratamiento mediante las técnicas de optimización tradicionales, capaces de encontrar el óptimo exacto. Por otro lado, el espectacular desarrollo de la capacidad computacional ha permitido desarrollar métodos heurísticos que buscan soluciones suficientemente buenas, aunque no garantizan necesariamente la obtención del óptimo exacto, en tiempos más que razonables. En particular, en los años 60, un grupo de investigadores propuso (de forma independiente) adaptar los principios de la evolución natural a este tipo de problemas, dando lugar a los algoritmos evolutivos. Más delante, estos algoritmos comienzan a adaptarse a problemas multiobjetivo, constituyendo lo que hoy se conoce como *optimización multiobjetivo evolutiva* (EMO). Aunque Branke et al. (2008) mencionan a Goldberg (1989) como el primer investigador que aplicó métodos evolutivos en el ámbito multiobjetivo, lo cierto es que la inmensa mayoría de los investigadores coinciden en señalar al profesor Kalyanmoy Deb (Figura 2.15) como el padre de la disciplina, siendo el autor principal del método EMO más conocido: NSGA-II

(Deb et al., 2002). En general, la finalidad de los métodos EMO es encontrar soluciones que sean lo suficientemente diversas como para representar el conjunto eficiente completo.

Figura 2.15: Kalyanmoy Deb

2.2.3.2. Métodos a priori

Este segundo bloque de métodos consiste en solicitar al decisor información sobre sus preferencias a priori y, haciendo uso de esta información, se resuelve un problema (o varios) de optimización tradicional para encontrar la solución factible que más se ajusta a esta información preferencial. Los métodos más importantes de este bloque se basan en la filosofía *satisfaciente*, acuñada en su día por el premio Nobel de Economía Herbert Simon (véase Simon, 1957). El término "satisfaciente" es una traducción del término inglés que usó Simon *satisficing* que, a su vez, era una combinación de los términos "satisfy" y "suffice". Es decir, se trata de describir un comportamiento humano que se aparta de la optimización, y se centra en conseguir una solución que sea suficientemente satisfactoria. Dentro de este bloque, vamos a distinguir dos técnicas:

- *La Programación por Metas*. Probablemente, sea el método multiobjetivo más conocido y utilizado en la práctica. El trabajo precursor de la Programación por Metas es Charnes et al. (1955), aunque se suele situar su nacimiento oficial, debido a los profesores Abraham Charnes y William Cooper (Figura 2.16), en el libro Charnes y Cooper (1988). Tras ello, aparecieron una serie de textos que se pueden catalogar como clásicos (Lee, 1972; Ignizio, 1976; Romero, 1991). En este método, se le pide al decisor que establezca un nivel de aspiración (nivel deseable) para cada objetivo, convirtiendo así los objetivos en metas. Como menciona Jones y Tamiz (2010), ya el filósofo griego Aristóteles consideró el establecimiento de metas como un comportamiento esencialmente humano: *"El hombre es un animal que busca cumplir sus metas. Su vida tiene un solo sentido y es alcanzar y concretar sus objetivos"* El decisor puede también dar pesos o incluso establecer prioridades entre las metas. Las distintas variantes de la Programación por Metas intentan encontrar una solución que las satisfaga, si ésta existe, o si no, la que, siguiendo

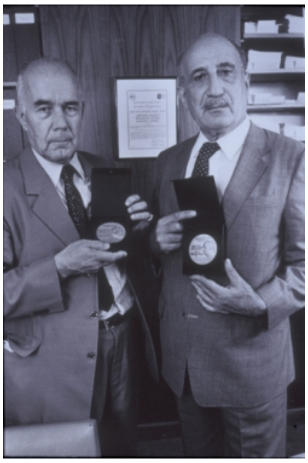


Figura 2.16: A. Charnes y W. Cooper

algún criterio, esté más cerca de los niveles de aspiración establecidos. Un inconveniente, que se cita a menudo, de esta técnica es que puede, sobre todo cuando hay soluciones factibles que satisfacen las metas impuestas, producir soluciones dominadas. De todas formas, se han desarrollado métodos para recuperar la eficiencia de dichas soluciones (Jones y Tamiz, 2010).

- **Método de Punto de Referencia**. Desarrollado por el profesor Andrzej Wierzbicki (Figura 2.17), también se basa en el establecimiento, por parte del decisor, de niveles deseables para cada objetivo, que Wierzbicki denominó *niveles de referencia*. La primera versión del método apareció en Wierzbicki (1980), y se puede encontrar una profusa revisión en Wierzbicki et al. (2000). Los niveles de referencia también se pueden acompañar de pesos, que pueden tener un papel que va desde meros coeficientes normalizadores, hasta pesos que expresan preferencias del decisor (Ruiz et al., 2009). Una

Figura 2.17: Andrzej P. Wierzbicki

vez dados estos parámetros, se obtiene una solución optimizando una función denominada *función escalarizada de logro*, que tiene además la virtud de asegurar la eficiencia de la solución obtenida, independientemente de los niveles de referencia establecidos. Además, se garantiza que el método puede encontrar cualquier solución eficiente en problemas no convexos.

2.2.3.3. Métodos interactivos

En los métodos interactivos, el intercambio de información entre el decisor y el analista tiene lugar de forma continua durante el proceso de resolución. El método incorpora progresivamente la información proporcionada por el decisor, para ayudarle a encontrar su solución preferida. Las técnicas interactivas son especialmente adecuadas para favorecer procesos de aprendizaje tanto para el decisor como para el analista. Tienen la ventaja de que el decisor incorpora sus preferencias de forma gradual, por lo que presentan una mayor flexibilidad. En general, todo método interactivo presenta el siguiente esquema:

1. Generar una (o varias) solución eficiente inicial,
2. Presentar la(s) solución(es) actual(es) al decisor,
3. ¿Está el decisor satisfecho con la solución?
   - "Sí": terminar.
   - "No": ir al paso 4
4. Pedir nueva información preferencial al decisor,
5. Generar una(s) nueva(s) solución(es) eficiente(s),
6. Ir al paso 2.

Existen multitud de métodos interactivos en la literatura científica. La diferencia fundamental entre ellos estriba en el Paso 4, es decir, qué información se le pide al decisor en cada paso, lo cual a su vez determina qué información se le presenta (Paso 2) y qué procedimiento hay que seguir para generar la siguiente iteración (Paso 5). A continuación, se mencionan brevemente los distintos tipos de información que se solicita al decisor, y se citan los métodos más clásicos de cada uno de los tipos.

- **Métodos de comparación de soluciones**. Algunos métodos simplemente piden al decisor que elijan en cada iteración una solución eficiente de entre un pequeño número de ellas que se generan en cada paso. En el año 1983, el profesor Ralph Steuer (Figura 2.18) desarrolló en su grupo de investigación el que denominaron Método de Tchebycheff (Steuer y Choo, 1983). Se basa en generar soluciones eficientes para distintos pesos, e ir reduciendo el espacio de pesos alrededor de la solución que elige el decisor en cada paso.

- **Métodos basados en tradeoffs**. Como se ha comentado en varias ocasiones, la idea de las tasas de intercambio (tradeoffs) entre los objetivos es muy

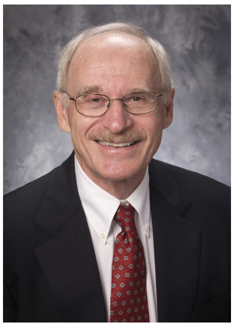


Figura 2.18: Ralph E. Steuer

importante en los métodos de Programación Multiobjetivo. Si nos movemos entre soluciones eficientes, sabemos que no podemos mejorar todos los objetivos, por lo que hay que permitir que alguno empeore para que otro mejore. El ratio entre lo que uno mejora y el otro empeora es lo que llamamos tradeoff. Hay métodos que se basan en pedir al decisor que especifique sus tradeoffs deseados a partir de la solución actual (cuánto están dispuestos a empeorar un objetivo para que otro mejore en una unidad). El método GDF (Geoffrion et al., 1972) es el más conocido de este tipo (y uno de los primeros métodos interactivos que se publicó). Otra posibilidad es pedir al decisor que evalúe o compare tradeoffs reales, es decir, las tasas de intercambio que se producen realmente al moverse a partir de la solución actual. Los profesores Stanley Zionts y Jyrki Wallenius (Figura 2.19) publicaron el método pionero de este tipo (Zionts y Wallenius, 1976), que fue concebido en un principio para problemas lineales, apoyándose en el método del símplex, aunque más tarde se adaptó para determinados problemas no lineales.

Figura 2.19: Stanley Zionts y Jyrki Wallenius

- **Métodos de especificación de niveles**. En la práctica, los métodos a priori descritos anteriormente (Programación por Metas y Punto de Referencia) se usan de forma interactiva, y el decisor actualiza sus niveles deseables para los objetivos a la vista de cada solución obtenida, hasta que está satisfecho con el punto final.

- **Métodos de clasificación**. Estos métodos son una extensión de los métodos de punto de referencia, en los que el decisor, a la vista de la solución actual, clasifica los objetivos en distintos grupos (los que quiere mejorar, los que permite empeorar, los que son aceptables en su actual nivel, etc.) El primer método interactivo publicado (Benayoun et al., 1971) pertenece a este tipo, aunque quizás el más utilizado actualmente sea el método NIMBUS (Miettinen y Mäkelä, 1995), desarrollado por el equipo de la profesora Kaisa Miettinen (Figura 2.20), que amplía el número de clases utilizadas y generaliza el método para problemas no lineales.

Figura 2.20: Kaisa Miettinen

- **Métodos sin tradeoffs**. Algunos autores, como Korhonen y Wallenius (1996), han enfatizado que el hecho de tener que realizar tradeoffs entre los objetivos es una fuente de estrés para el decisor, y provoca que éste lleve a cabo pocas iteraciones. Por ello, recientemente, se han desarrollado métodos interactivos en los que se comienza desde una mala solución (dominada), y en cada paso se mejoran todos los objetivos hasta llegar al conjunto eficiente. Son los denominados métodos NAUTILUS (Miettinen et al., 2010; Miettinen y Ruiz, 2016).

Para concluir, veamos cómo podría ser la resolución del ejemplo de los tiempos de la lección inaugural. A la vista de la matriz de pagos, sabemos que, en el conjunto eficiente, el contenido teórico oscila entre 12 y 17 minutos, mientras que el práctico está entre 9.5 y 14.5 minutos. Supongamos que decido dar unos niveles deseados para estos objetivos:

- Que el contenido teórico sea, al menos, de 14 minutos;
- Que el contenido práctico sea, al menos, de 11 minutos.

Si utilizamos el método de Punto de Referencia, la distribución de tiempos de la solución obtenida, que se representa en la Figura 2.21, es la siguiente:

- 9.5 minutos para la introducción,
- 10.5 minutos para las técnicas,

- 5 minutos para las aplicaciones,
- 5 minutos para las conclusiones.

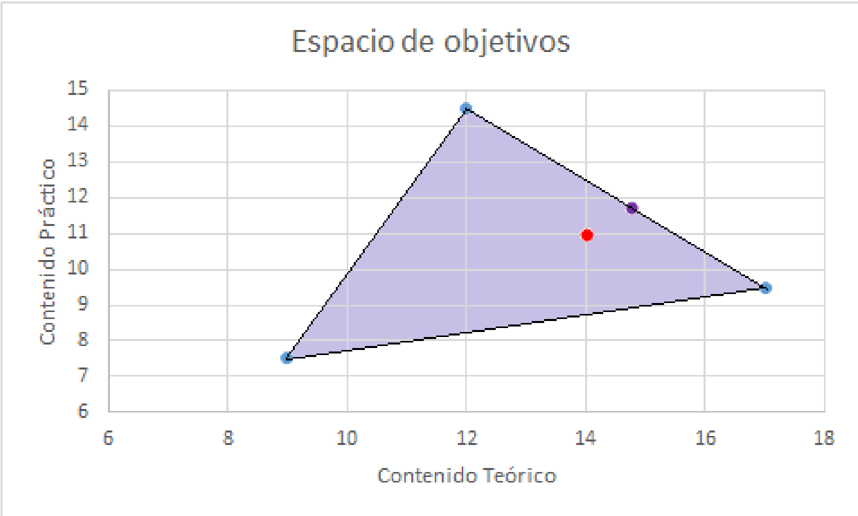


Figura 2.21: Solución por el Método de Punto de Referencia

Los valores de las funciones objetivo en la solución son de 14.75 minutos para el contenido teórico, y 11.75 minutos para el contenido práctico. Como se puede comprobar, el punto de referencia dado (en rojo en la Figura 2.21), era dominado[5], por lo que el método de punto de referencia encuentra una solución eficiente que lo domina (en púrpura). Podríamos ahora realizar alguna iteración mediante un método interactivo de clasificación. Por ejemplo, supongamos que, a la vista de la solución, decido que quiero que mejore el tiempo de contenido práctico, a costa de relajar el teórico hasta 14 minutos. La nueva solución (Figura 2.22) determina ahora unos tiempos de 11 minutos para la introducción y 9 para las técnicas (aplicaciones y conclusiones siguen durando, obviamente, 5 minutos cada una).

En la nueva solución, a partir del punto anterior (ahora en rojo), se ha sacrificado el tiempo de contenido teórico, que ha bajado hasta 14 minutos, para mejorar el tiempo de contenido práctico, que ha subido a 12.5 minutos (punto púrpura). Este tipo de iteración se puede repetir hasta lograr una solución con la que esté satisfecho. Termino con otra nota de aprendizaje. En esta caso, hemos sacrificado 0.75 minutos de contenido teórico, y hemos mejorado 0.75 minutos de contenido práctico. Por lo tanto, en la porción de conjunto eficiente en la que nos estamos moviendo, la tasa de intercambio (tradeoffs) entre los dos objetivos es de 1 a 1: necesito empeorar un minuto de un objetivo para mejorar un minuto del otro. Aunque esta situación no tiene por qué mantenerse igual en todo el conjunto eficiente (en

[5]La situación del punto de referencia es obvia a la vista de la figura, pero el lector debe pensar en un problema real en el que la representación gráfica no está disponible.

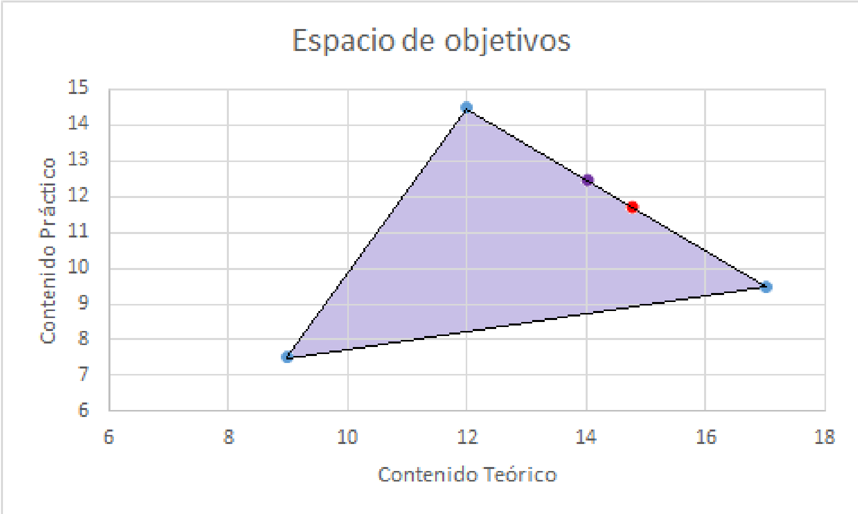


Figura 2.22: Interacción mediante un Método de Clasificación

nuestro ejemplo, sí lo hace), el dato me permite aprender sobre el problema en el entorno de la solución actual.

Me gustaría cerrar este capítulo con una advertencia para usuarios. Como hemos visto, hay una gran cantidad de métodos para resolver problemas multicriterio. ¿Cuál elegir? Obviamente, el que más se ajuste a las características del problema y, sobre todo, a la forma en la que el decisor desea resolverlo. Es un error elegir el método según el gusto del analista. La obligación de este último es conocer las distintas metodologías y asesorar al decisor para elegir el método más adecuado. No se preocupe el lector: no voy a plantear un modelo multicriterio para elegir el mejor método multicriterio. Pero tengamos siempre presente la frase del psicólogo estadounidense Abraham Maslow: *"si tu única herramienta es un martillo, tiendes a tratar cada problema como si fuera un clavo"*. Todos los problemas no son clavos, pero afortundamente, tenemos una caja de herramientas bien pertrechada.

Capítulo 3

¿Para qué sirve? Aplicaciones reales

En los capítulos anteriores, hemos utilizado ejemplos hipotéticos sobre decisiones acerca del contenido y estructura de esta lección inaugural, para motivar y describir las distintas técnicas multicriterio existentes. Se trata, claro está, de un ejemplo de andar por casa, por calificarlo generosamente. Pero, ahora en serio: ¿sirve esto para algo? ¿De verdad pueden ayudarnos las matemáticas a elegir en problemas reales complejos (es decir, útiles)? Yo diría que sí, y mucho. Por ejemplo, las matemáticas han ayudado a multitud de estudiantes a elegir sus estudios: los que menos matemáticas tengan. Pero bromas aparte, la respuesta a esta pregunta es obvia: si podemos modelizar matemáticamente el problema, entonces las matemáticas ciertamente nos pueden ayudar a decidir. ¿Y qué problemas se pueden modelizar matemáticamente? Pues según Galileo, todos (*"las Matemáticas son el alfabeto con el que Dios ha escrito el universo"*). Yo creo que, dada la mala fama que siempre hemos tenido los matemáticos, fue esta frase la que le procuró al genial científico italiano sus problemas con la iglesia, y no las tonterías sobre si la tierra se mueve o no...

Lo cierto es que son múltiples las aplicaciones reales de la Toma de Decisiones Multicriterio que se pueden encontrar en la literatura científica. En dos revisiones bibliográficas más o menos recientes (Stewart et al., 2008; Greco et al., 2016), pueden encontrarse aplicaciones reales en campos tan diversos como:

- Finanzas. Selección de carteras (acciones, proyectos, etc...)
- Ingeniería industrial.
- Sector de la energía.
- Planificación y diseño de redes de telecomunicaciones.
- Medicina y salud.

- Desarrollo sostenible.
- Logística.
- Planificación de uso del suelo (¡se pueden hacer PGOUs!).
- ...

En este capítulo, describiré brevemente algunas de estas aplicaciones. Podría haber escogido otras muchas. Simplemente, he seguido los criterios de que fuesen suficientemente interesantes y con una temática variada. También describiré otras que, modestamente, se han llevado a cabo (o están en marcha) en el grupo de investigación al que pertenezco. En cualquier caso, no es mi interés, ni mucho menos, entrar en los detalles de las distintas aplicaciones, sino sólo dar una breves pinceladas de cada una a título meramente informativo. El lector interesado puede recurrir a las referencias que aparecen en cada aplicación para más detalles.

3.1. Aplicaciones en Ingeniería

3.1.1. Diseño Aerodinámico

El tratamiento de este tipo de problemas es especialmente complejo, por varios motivos. En primer lugar, habitualmente, se necesita tener en cuenta una gran cantidad de parámetros de diseño que incrementan la complejidad del modelo. Por otro lado, no se dispone de una función analítica para evaluar las prestaciones del diseño, por lo que no son aplicables los algoritmos tradicionales basados en el cálculo diferencial. Además, para evaluar la calidad de los diseños, es generalmente necesario realizar simulaciones o experimentos costosos. Esto hace que lo que es habitualmente fácil y rápido (y gratis) en un modelo tradicional (evaluar una función) se convierta ahora en un proceso complejo, lento y costoso, por lo que es necesario reducir al mínimo el número de esos experimentos necesarios para la obtención de la solución.

En este ámbito, Stewart et al. (2008) describen una aplicación de Hasenjäger et al. (2005) de técnicas multicriterio al diseño en tres dimensiones de hojas de estátor (la parte fija) en una turbina de gas (Figura 3.1).

En este estudio, se tienen en cuenta dos objetivos:

1. La pérdida media de presión, que indica la eficiencia energética de la hoja,
2. La variación de la presión estática según el ángulo de la hoja.

En Hasenjäger et al. (2005) y Stewart et al. (2008), se proponen el uso de diversas técnicas de Optimización Multiobjetivo Evolutiva (EMO) para detectar el conjunto de diseños eficientes.

Figura 3.1: Hojas de estátor de una turbina de gas

3.1.2. Optimización de los sistema auxiliares de una central térmica

En una central térmica (Figura 3.2), aparte de las turbinas principales donde se produce la generación eléctrica propiamente dicha, hay una serie de motores encargados de tareas auxiliares (bombas de agua, ventiladores, molinos para el carbón, etc.) Es lo que se denominan los sistemas auxiliares de la planta. A pesar de que estos sistemas tienen un consumo considerable (que puede variar entre el 6 % y el 15 % de la energía total generada), tradicionalmente se les había prestado poca atención.

Figura 3.2: Central térmica de generación eléctrica

En Ruiz et al. (2015) se estudia el caso de una central en la que el rendimiento de los sistemas auxiliares era correcto en situaciones de carga total, pero se reducía sensiblemente en cargas parciales. Se consideran varias accciones posibles en el estudio: reemplazar motores por otros de alta eficiencia, instalar variadores de velocidad en los ya existentes, o instalar condensadores en diversos puntos de la red. Los objetivos que se tienen en cuenta son los siguientes:

1. Maximizar el ahorro energético,

2. Minimizar el coste de la inversión,

3. Maximizar la TIR de la inversión.

El problema tiene la dificultad adicional de que no se tiene una función analítica que modelice el gasto energético de los sistemas auxiliares, por lo que su funcionamiento se simula en una caja negra. Ello obligó al uso de técnicas multiobjetivo evolutivas, que posteriormente se combinaron con métodos interactivos de punto de referencia para obtener la solución final.

3.2. Aplicaciones en Logística

3.2.1. Turnos de trabajo de controladores aéreos

Este problema, publicado en Tello et al. (2018), trata de cubrir una sectorización del espacio aéreo con un número determinado de controladores (Figura 3.3). Para cada día se conoce el número de sectores que se van a abrir y del número de controladores, con sus respectivas cualificaciones, de los que se va a disponer para controlar los sectores abiertos, y se trata de determinar sus turnos de la mejor forma posible. En concreto, se intenta asignar controladores a sectores aéreos de tal forma que se optimicen cuatro objetivos y se respete un conjunto de restricciones. Las restricciones modelizan las condiciones laborales de los controladores. Por ejemplo, los controladores están cualificados para controlar sectores de aproximación (los que están próximo al aeropuerto) o los de crucero. Además, los sectores se pueden agrupar constituyendo núcleos y los controladores están cualificados para operar en un determinado núcleo. Cada sector debe estar controlado por dos controladores, uno en posición ejecutivo (es el que habla con los pilotos) y otro en posición planificador (ve lo que está ocurriendo en los sectores vecinos al sector controlado).

Figura 3.3: Controladores aéreos

En el estudio, se han considerado cuatro objetivos:

1. Duración de los periodos de trabajo y descanso:

    - El tiempo que un controlador permanece en una posición (ejecutivo o planificador) en un sector debería ser lo más próximo posible a 45 minutos.

- El tiempo de trabajo entre dos descansos debería ser 90 minutos.
- El porcentaje del tiempo de trabajo de un controlador en posición de ejecutivo debería estar entre el 40 % y el 60 % del tiempo total de trabajo (no incluyendo los periodos de descanso).

2. La estructura de la solución debe ser similar a las plantillas que utilizan actualmente para que no suponga un cambio muy brusco.

3. Minimizar el número de cambios de control (equivalente a minimizar el número de periodos de descanso en cada turno).

4. La carga de trabajo de los controladores debe ser equilibrada.

El problema se resolvió con un método heurístico, combinado con los niveles de referencia expresados por el centro decisor. Se han comparado las soluciones obtenidas con la metodología multicriterio utilizada y las que se aplicaban en la realidad. En todos los casos, las soluciones proporcionadas son mejores que las aplicadas (mejoran los objetivos) y en algunas de ellas fueron necesarios un número menor de controladores.

3.2.2. Recogida de residuos sólidos urbanos

El tratamiento de residuos es un tema de estudio por parte de las administraciones locales a nivel mundial y se deben tener en cuenta distintos factores, de tipo económico, social y medioambiental, para realizar un servicio eficiente. En Delgado-Antequera (2018) se desarrolla una herramienta para analizar y resolver el problema de la recogida de residuos sólidos en la provincia de Málaga. Se trata de diseñar las rutas de los camiones que realizan el servicio de recogida (Figura 3.4). En el estudio, hay que tener en cuenta la localización real de los contenedores, para lo que se utiliza un sistema de información geográfica (SIG), que también recoge las vías por las que pueden circular los camiones, las distancias correspondientes y las condiciones de circulación. A estas limitaciones hay que añadir las de la capacidad de los camiones, así como el tipo de contenedor (de carga lateral o trasera).

En el problema, se consideran los siguientes cuatro objetivos:

1. Minimizar la distancia total recorrida,

2. Minimizar de la ruta más larga,

3. Minimizar la diferencia entre las rutas más larga y más corta,

4. Minimizar el número total de rutas necesarias.

Para resolver el problema, se utilizó un proceso de dos fases. En una primera, se generó una aproximación del conjunto eficiente mediante algoritmos multiobjetivo evolutivos. Es una segunda fase, se empleó un algoritmo interactivo tipo

Figura 3.4: Recogida de residuos sólidos urbanos

NAUTILUS para determinar la solución más acorde con las preferencias del centro decisor. Las rutas obtenidas se muestran finalmente con ayuda del SIG.

3.3. Otras aplicaciones interesantes

3.3.1. Radioterapia de intensidad modulada

El cáncer es hoy en día uno de los problemas de salud más importantes en el mundo, siendo la segunda causa de fallecimientos en los países desarrollados. Uno de los tratamientos posibles consiste en usar radiación ionizante para dañar el ADN e interferir en la división y crecimiento de las células cancerígenas. Los procedimientos modernos emplean una tecnología denominada radioterapia de intensidad modulada (Figura 3.5), que hace uso de un colimador multihoja que permite dar forma a los haces de irradiación y controlar la intensidad de la misma a lo largo de la dirección del haz. Esta tecnología permite a los pacientes recibir tratamientos más complejos, pero la cantidad de opciones disponibles hace imposible su planificación manual. Los modelos matemáticos para este tratamiento están basados en una discretización, tanto del área de cuerpo que va a recibir el tratamiento, que se divide en elementos cúbicos denominados *vóxeles*, como de los propios haces, que se dividen en trozos denominados *bíxeles*. La dosis de radiación recibida en cada vóxel se controla medianta la modulación de la intensidad.

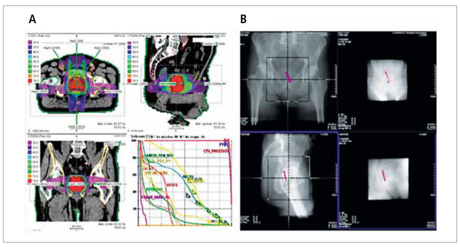


Figura 3.5: Radioterapia de intensidad modulada

Dos son los objetivos que hay que tener en cuenta en este problema:

1. Administrar la dosis conveniente en la zona tumoral,
2. Preservar los tejidos sanos circundantes.

Tradicionalmente, el problema se ha resuelto utilizando modelos de optimización de un único objetivo, que es básicamente una suma ponderada de los objetivos citados. Sin embargo, ya se pueden encontrar en la literatura científica aplicaciones de metodologías multicriterio a esta modelización. Por ejemplo, Hamacher y Küfer (2002) aplican diseños multiobjetivo para determinar el conjunto eficiente del problema, Jee et al. (2007) establecen un método lexicográfico (utilizando niveles de prioridad), y Ehrgott y Winz (2008) diseñan un procedimiento interactivo para encontrar la mejor solución.

3.3.2. Construcción de indicadores sintéticos

El creciente desarrollo de la sociedad de la información en la que vivimos hace que cada vez podamos obtener mayor cantidad de datos acerca de los problemas que estudiamos. Un ejemplo de esta profusión de información es el elevado número de indicadores de los que se dispone para medir determinados fenómenos, como la sostenibilidad de un sistema, la eficiencia de los sistemas universitarios, etc. Lamentablemente, esa cantidad de información puede convertirse en inmanejable para los centros decisores. Por ello, han surgido últimamente procedimientos para construir indicadores sintéticos (Figura 3.6), es decir, para condensar la información contenida en toda la batería de indicadores individuales en una única medida final, que sea fácilmente interpretable.

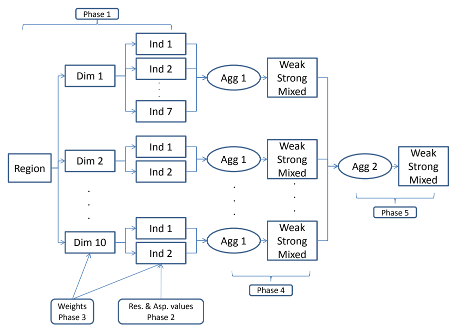


Figura 3.6: Contrucción de indicadores sintéticos

La construcción de dichos indicadores sintéticos puede considerarse de forma natural como un problema multicriterio (El Gibari et al., 2018), donde los distintos indicadores son los criterios a tener en cuenta para construir la medida global. Blancas et al. (2010) aplicaron un método de Programación por Metas, definiendo varios indicadores sintéticos, a partir de las desviaciones de los indicadores simples con respecto a determinados niveles de aspiración. Posteriormente, Ruiz et al.

(2011) desarrollaron un método multicriterio para calcular indicadores sintéticos, basado en el método de Punto de Referencia, en que el que pueden establecer, para cada indicador, dos niveles de referencia: un nivel de reserva (nivel admisible) y un nivel de aspiración (nivel deseable). La función escalarizada de logro mide la posición de cada unidad con respecto a estos niveles de referencia. Se pueden construir dos indicadores sintéticos, según el nivel de compensación permitido:

- Un *indicador sintético débil*, que permite compensación total entre los indicadores individuales, es decir, un mal comportamiento en uno se puede compensar con uno bueno en otro.
- Un *indicador sintético fuerte*, que no permite dicha compensación, por lo que es una medida del peor comportamiento.

Esta metodología se ha aplicado con éxito en diversos ámbitos, como el sector turístico (Blancas et al., 2010; Navarro et al., 2012; Gallego, 2015; Damian, 2015), la medición de la sostenibilidad (Cabello et al., 2014a), la inversión socialmente responsable (Cabello et al., 2014b), o en un estudio actualmente en marcha sobre la elaboración de rankings de universidades.

Capítulo 4

Conclusiones

Me gustaría concluir esta lección con unas breves líneas para afianzar las principales ideas que he querido transmitir en ella. Aunque habitualmente nos guste tener distintas opciones entre las que poder elegir, lo cierto es que hacerlo supone algunas veces un problema, y siempre una responsabilidad. La toma de decisiones es una actividad cosustancial al ser humano, y realmente, todos pasamos bastante tiempo reflexionando sobre ellas. Aún así, a pesar de nuestra experiencia, en determinadas circunstancias es deseable contar con algún tipo de ayuda para decidirnos. En aquellos que problemas que admiten una modelización matemática (que son más de los que muchos pudieran suponer), estas Matemáticas pueden ser un apoyo válido.

Tradicionalmente, la Investigación Operativa ha venido ayudando a la toma de decisiones a través de los métodos de optimización. Se trata de modelizar un problema de forma que la elección óptima consiste en encontrar, de entre un conjunto de soluciones posibles, la que optimiza un único criterio. Es indudable que este enfoque ha conseguido (y seguirá consiguiendo) importantes logros en muy diversos campos de aplicación. Sin embargo, la optimización tradicional no es necesariamente válida en todos los ámbitos. Ello es así porque no siempre lo óptimo es la mejor solución posible. Puede ser que la solución óptima sea muy compleja de implementar, o que sea demasiado sensible a cambios en las condiciones del problema que hagan que deje de ser factible. Además, un problema de optimización no es, en esencia, un problema de decisión, ya que toda decisión tiene un componente subjetivo, mientras que la optimización es un problema tecnológico de búsqueda (que puede ser extremadamente complicado, eso sí) que no admite opiniones más allá de la propia modelización del problema: todo el mundo estará de acuerdo en que una opción es la que tiene el precio más bajo, por ejemplo, al menos hasta que aparezca otra más barata, que nuevamente convencerá a todos.

Desde el punto de vista matemático, una decisión se caracteriza por la consideración de varios objetivos en conflicto: lo que es muy bueno para uno, es muy malo para otro. Por tanto, la alternativa elegida depende de la importancia concedida a cada uno de los objetivos y esto es, en esencia, subjetivo. Partimos, pues, de la base de que no existe una decisión que todos admitan como la mejor. Como decía antes, la decisión es competencia, y también responsabilidad, del que decide. En este ámbito, la Toma de Decisiones Multicriterio (MCDM) es la rama de la Investigación Operativa encargada de desarrollar técnicas matemáticas de apoyo a la toma de decisiones. Es importante insistir en que no se trata de que las Matemáticas decidan por nosotros, sino de aplicar técnicas que incluyen las preferencias del decisor en el modelo, para ayudarle a encontrar **SU** mejor decisión. Por ello, el factor clave, a mi juicio, de la modelización y resolución matemáticas de un problema de decisión es el aprendizaje. Todos los agentes implicados en el proceso aprenden a lo largo del mismo. Por supuesto, el analista aprende sobre el problema y su entorno. Pero el decisor también aprende sobre la estructura del problema y el grado de conflicto entre los objetivos y también, en ocasiones, sobre sus propias preferencias. Al fin y al cabo, como docentes sabemos bien que no hay mejor forma de aprender algo que tener que enseñarlo (si esto se hace con responsabilidad). Así pues, enseñar a un modelo matemático sobre nuestro problema es, sin duda, una fuente aprendizaje. Además, ningún decisor responsable admitirá sin más la solución proporcionada por un método matemático (ni de ninguna otra índole) si no está seguro de que ha aprendido lo suficiente sobre el problema y sus diversas opciones.

La Toma de Decisiones Multicriterio pone a nuestra disposición un amplio abanico de técnicas para adaptarnos de la mejor forma posible tanto a las características específicas de cada problema como a la manera en la que el decisor se sienta más cómodo proporcionando la información necesaria acerca de sus preferencias. Es responsabilidad del analista conocer las distintas técnicas para poder seleccionar la más adecuada en cada circunstancia, sin aportar su subjetividad al proceso. Como hemos visto, las metodologías multicriterio se han aplicado con éxito en multitud de problemas reales de ámbitos muy diversos. Además, en España tenemos la suerte de contar con grupos de investigación de reconocido prestigio a nivel internacional, por lo que estaría muy satisfecho si esta lección sirviese para que investigadores de otros ámbitos se hagan conscientes de la ayuda que las matemáticas pueden ofrecer, y se animen a contactar con nosotros. Créanme, será una buena decisión.

No me queda más remedio que terminar con una confesión. En realidad, no he utilizado técnicas multicriterio para tomar las decisiones sobre el contenido y estructura de esta lección inaugural. Como pueden suponer, hubiese sido matar moscas a cañonazos, y no quiero yo que alguna asociación animalista la tome conmigo. Los ejemplos han sido sólo eso: ejemplos para ayudarme a exponer las ideas, y espero que hayan sido de utilidad. En realidad, no hay metodología que sustituya a la experiencia (y a la intuición que de ella se deriva) del experto. Pero en determinados problemas complejos, es posible apoyar a esta experiencia desde la Toma de Decisiones Multicriterio. En el caso que nos ha ocupado, toda la similitud que encuentre el lector entre la estructura real de la lección y los resultados que he obtenido en los ejemplos se debe a una vergonzante falta de ética científica por mi parte: he preparado las modelizaciones para que sus resultados se pareciesen a la decisión que ya había tomado. Claro, también es posible utilizar la Decisión Multicriterio (o cualquier otra disciplina, como la estadística, que se maltrata a menudo) para justificar decisiones tomadas de antemano, dándoles una apariencia científica. En nuestra mano está, como investigadores universitarios, velar por la consideración de la ética (personal y profesional) como uno de los principales componentes de nuestra actividad.

Bibliografía

BANA E COSTA, C. y VANSNICK, J. Applications of the MACBETH approach in the framework of an additive aggregation model. *Journal of Multicriteria Decision Analysis*, vol. 6(2), páginas 107–114, 1997.

BELTON, V., GRECO, S., ESKELINEN, P., MOLINA, J., RUIZ, F. y SLOWINSKI, R. Interactive multiobjective optimization from a learning perspective. En *Multiobjective Optimization: Interactive and Evolutionary Approaches* (editado por J. Branke, K. Deb, K. Miettinen y R. Slowinski), páginas 405–434. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2008.

BENAYOUN, R., DE MONTGOLFIER, J., TERGNY, J. y LARITCHEV, O. Programming with multiple objective functions: step method (STEM). *Mathematical Programming*, vol. 1(3), páginas 366–375, 1971.

BILBAO, A. *¿Qué es "Lo Mejor"?*. Universidad de Oviedo, Oviedo, 2017.

BLANCAS, F., CABALLERO, R., GONZÁLEZ, M., LOZANO-OYOLA, M. y PÉREZ, F. Goal programming synthetic indicators: An application for sustainable tourism in Andalusian coastal countries. *Ecological Economics*, vol. 69, páginas 2158–2172, 2010.

BRANKE, J., DEB, K., MIETTINEN, K. y SLOWINSKI, R. *Multiobjective Optimization: Interactive and Evolutionary Approaches*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2008.

BRANS, J., MARESCHAL, B. y VINCKE, P. PROMETHEE: A new family of outranking methods in multicriteria analysis. En *Operational Research'84* (editado por J. Brans), páginas 408–421. North-Holland, Amsterdam, 1984.

BUDNICK, F., MCLEAVEY, D. y MOJENA, R. *Principles of Operations Research for Management*. Irwin, Homewood, Illinois, 1988.

CABELLO, J., NAVARRO, E., PRIETO, F., RODRÍGUEZ, B. y RUIZ, F. Multicriteria development of synthetic indicators of the environmental profile of the Spanish regions. *Ecological Indicators*, vol. 39, páginas 10–23, 2014a.

CABELLO, J. M., RUIZ, F., PÉREZ-GLADISH, B. y MÉNDEZ-RODRÍGUEZ, P. Synthetic indicators of mutual funds‘ environmental responsibility: An application of the reference point method. *European Journal of Operational Research*, vol. 236, páginas 313–325, 2014b.

CHARNES, A. y COOPER, W. *Management Models and Industrial Applications of Linear Programming*. John Wiley & Sons, New York, 1988.

CHARNES, A., COOPER, W. y FERGUSON, R. Optimal estimation of executive compensation by linear programming. *Management Science*, vol. 1(2), páginas 138–151, 1955.

CHURCHMAN, C., ACKOFF, R. y ARNOFF, E. *Introducción a la Investigación Operativa*. Aguilar, Barcelona, 1971.

DAMIAN, I. *Estudio de la sostenibilidad en destinos turísticos a través de la participación comunitaria: el caso de la Costa del Sol*. Universidad de Málaga, Málaga, 2015. Tesis Doctoral.

DEB, K., AGRAWAL, S., PRATAP, A. y MEYARIVAN, T. A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, vol. 6(2), páginas 182–197, 2002.

DELGADO-ANTEQUERA, L. *An interactive approach to the multiobjective waste collection problem. A real application in a southern city of Spain*. Universidad de Málaga, Málaga, 2018. Tesis Doctoral.

EHRGOTT, M. y WINZ, I. Interactive decision support in radiation therapy treatment planning. *OR Spectrum*, vol. 30, páginas 311–329, 2008.

EL GIBARI, S., GÓMEZ, T. y RUIZ, F. Building composite indicators using multicriteria methods: a review. *Journal of Business Economics*, 2018. En prensa. Disponible online: `https://doi.org/10.1007/s11573-018-0902-z`.

FORTEMPS, P. y SLOWINSKI, R. A graded quadrivalent logic for preference modelling: Loyola-like approach. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, vol. 1, páginas 93–111, 2002.

FRIEDMAN, M. *Teoría de los Precios (2.ª Edición)*. Alianza Editorial, Madrid, 1990.

GALLEGO, I. *Vulnerabilidad de los destinos turísticos. Propuesta de un sistema de indicadores para su gestión*. Universidad de Málaga, Málaga, 2015. Tesis Doctoral.

GASS, S. *Linear Programming. Methods and Applications*. International Thomson Publishing, Danvers, Massachusetts, 1985.

GASS, S. y SAATY, T. The computational algorithm for the parametric objective function. *Naval Research Logistics Quarterly*, vol. 2, páginas 39–45, 1955.

GEOFFRION, A., DYER, J. y FEINBERG, A. An interactive approach for multicriterion optimization, with application to the operation of an acedemic department. *Management Science*, vol. 19(4), páginas 357–368, 1972.

GOLDBERG, D. *Genetic Algorithms for Search, Optimization and Machine Learning*. Addison-Wesley, Reading, 1989.

GRECO, S., EHRGOTT, M. y FIGUEIRA, J., editores. *Multiple Criteria Decision Analysis. State of the Art Surveys*. Springer, New York, 2016.

HAIMES, Y., LASDON, L. y WISMER, D. On a bicriterion formulation of the problems of integrated system identification and system optimization. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, vol. 1, páginas 296–297, 1971.

HAMACHER, H. y KÜFER, K. Inverse radiation therapy planning - a multiple objective optimization approach. *Discrete Applied Mathematics*, vol. 118, páginas 145–161, 2002.

HASENJÄGER, M., SENDHOFF, B., SONODA, T. y ARIMA, T. Three dimensional evolutionary aerodynamic design optimization using single and multi-objective approaches. En *Evolutionary and deterministic methods for design, optimization and control with applications to industrial and societal problems. Proceedings, EUROGEN 2005* (editado por R. Schilling, W. Haase, J. Periaux, H. Baier y G. Bugeda). FLM, TU, Munich, 2005.

IGNIZIO, J. *Goal Programming and Extensions*. Lexington Books, Lexington, MA., 1976.

JEE, K., MCSHAN, D. y FRAASS, B. Lexicographic ordering: intuitive multicriteria optimization for IMRT. *Physics in Medicine and Biology*, vol. 52, páginas 1845–1861, 2007.

JONES, D. y TAMIZ, M. *Practical Goal Programming*. Springer, New York, 2010.

KEENEY, R. *Value-Focused Thinking: A Path to Creative Decisionmaking*. Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1992.

KEENEY, R. y RAIFFA, H. *Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Tradeoffs*. Wiley, 1976.

KORHONEN, P. y WALLENIUS, J. Behavioral issues in MCDM: Neglected research questions. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, vol. 5, páginas 178–182, 1996.

LEE, S. *Goal Programming for Decision Analysis*. Auerback, Philadelphia, PA, 1972.

MACCRIMMON, K. An overview of multiple objective decision making. En *Multiple Criteria Decision Making* (editado por J. Cochrane y M. Zeleny), páginas 18–43. University of South Carolina Press, Columbia, 1973.

MIETTINEN, K. *Nonlinear Multiobjective Optmimization*. Kluwer Academic Publishers, Norwell, Massachusetts, 1999.

MIETTINEN, K., ESKELINEN, P., RUIZ, F. y LUQUE, M. NAUTILUS method: An interactive technique in multiobjective optimization based on the nadir point. *European Journal of Operational Research*, vol. 206(2), páginas 426–434, 2010.

MIETTINEN, K. y MÄKELÄ, M. Interactive bundle-based method for nondifferentiable multiobjective optimization: NIMBUS. *Optimization*, vol. 34, páginas 231–246, 1995.

MIETTINEN, K. y RUIZ, F. NAUTILUS framework: towards trade-off-free interaction in multiobjective optimization. *Journal of Business Economics*, vol. 86(1), páginas 5–21, 2016.

NAVARRO, E., TEJADA, M., ALMEIDA, F., CABELLO, J., CORTÉS, R., DELGADO, J., FERNÁNDEZ, F., GUTIÉRREZ, G., LUQUE, M., MÁLVAREZ, G., MARCENARO, O., NAVAS, F., RUIZ, F., RUIZ, J. y SOLÍS, F. Carrying capacity assessment for tourist destinations. Methodology for the creation of synthetic indicators applied in a coastal area. *Tourism Management*, vol. 86, páginas 1337–1346, 2012.

NEWMAN, J. *SIGMA: El Mundo de las Matemáticas*. Grijalbo, Barcelona, 1968.

PACHECO, J. *La Introducción a la Investigación Operativa: el Papel de las Matemáticas en la Toma de Decisiones. Aplicaciones Sociales, Humanitarias y Sanitarias*. Universidad de Burgos, Burgos, 2015.

POMEROL, J. y BARBA-ROMERO, S. *Multicriterion Decision in Management: Principles and Practice*. Kluwer Academic Publishers, Norwell, Massachusetts, 2000.

RÍOS-INSUA, S. *Investigación Operativa. Programación Lineal y Aplicaciones*. Editorial Centro de Estudios Ramón Areces, S.A., Madrid, 1996.

ROMERO, C. *A Handbook of Critical Issues in Goal Programming*. Pergamon Press, Oxford, 1991.

ROMERO, C. *Teoría de la Decisión Multicriterio: Conceptos, Técnicas y Aplicaciones*. Alianza Editorial, Madrid, 1993.

ROY, B. Classement et choix en présence de points de vue multiples, la méthode ELECTRE. *Révue Francaise D'Informatique et de Recherche opérationnelle*, vol. 2, páginas 57–75, 1968.

ROY, B. ELECTRE III: Un algorithme de rangement fondé sur une représentation floue des préférences en présence de critères multiples. *Cahiers du Centre d'études de recherche operationnelle*, vol. 20, páginas 3–24, 1978.

RUIZ, A., LUQUE, M., RUIZ, F. y SABORIDO, R. A combined interactive procedure using preference-based evolutionary multiobjective optimization. Application to the efficiency improvement of the auxiliary services of power plants. *Expert Systems with Applications*, vol. 42, páginas 7466–7482, 2015.

RUIZ, F., CABELLO, J. M. y LUQUE, M. An application of reference point techniques to the calculation of synthetic sustainability indicators. *Journal of the Operational Research Society*, vol. 62, páginas 189–197, 2011.

RUIZ, F., LUQUE, M. y CABELLO, J. M. A classification of the weighting schemes in reference point procedures for multiobjective programming. *Journal of the Operational Research Society*, vol. 60, páginas 544–553, 2009.

SAATY, T. A scaling method for priorities in hierarchical structures. *Journal of Mathematical Psychology*, vol. 15(3), páginas 234–281, 1977.

SAATY, T. *Decision Making with Dependence and Feedback: The Analytic Network Process*. RWS Publications, Pittsburgh, Pennsylvania, 1996.

SIMON, H. *Models of Man*. Jonh Wiley & Sons, New York, 1957.

STEUER, R. *Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation, and Application*. John Wiley & Sons, New York, 1986.

STEUER, R. y CHOO, E. An interactive weighted Tchebycheff procedure for multiple objective programming. *Mathematical Programming*, vol. 26, páginas 326–344, 1983.

STEWART, T., BANDTE, O., BRAUN, H., CHAKRABORTI, N., EHRGOTT, M., GÖBELT, M., JIN, Y., NAKAYAMA, H., POLES, S. y DI STEFANO, D. Real-world applications of mutiobjective optimization. En *Multiobjective Optimization: Interactive and Evolutionary Approaches* (editado por J. Branke, K. Deb, K. Miettinen y R. Slowinski), páginas 285–327. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2008.

TAHA, H. *Investigación de Operaciones*. Pearson Education, México, 2004.

TELLO, F., MATEOS, A., JIMÉNEZ-MARTÍN, A. y SUÁREZ, A. The air traffic controller work shift scheduling problem in Spain from a multi-objective perspective: A metaheuristic and regular expression-based approach. *Mathematical Problems in Engineering*, 2018. En prensa. Disponible online: `https://doi.org/10.1155/2018/4719178`.

WIERZBICKI, A. The use of reference objectives in multiobjective optimization. En *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems,* vol. 177 (editado por G. Fandel y T. Gal), páginas 468–486. Springer-Verlag, Berlin, 1980.

WIERZBICKI, A., MAKOWSKI, M. y WESSELS, J., editores. *Model-Based Decision Support Methodology with Environmental Applications*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.

YU, P. *Multiple-Criteria Decision Making. Concepts, Techniques, and Extensions*. Plenum Press, New York, 1985.

ZADEH, L. Optimality and non-scalar-valued performance criteria. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 8, páginas 59–60, 1963.

ZELENY, M. *Multiple Criteria Decision Making*. McGraw Hill, New York, 1982.

ZIONTS, S. y WALLENIUS, J. An interactive multiple objective linear programming method for a class of underlying nonlinear utility functions. *Management Science*, vol. 29, páginas 519–529, 1976.