

# Series numéricas

## Problemas de Cálculo de I.T.I.

1. Usa la definición para estudiar el carácter y sumar, si es posible, las siguientes series numéricas:

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$       b)  $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$  para  $r \in \mathbb{R}$       c)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n}$   
d)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{3n}}{7^n}$       e)  $\sum_{n=1}^4 \frac{1}{n}$       f)  $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots$

2. Usa las propiedades (condición necesaria, suma y producto por escalares) de las series numéricas para estudiar el carácter de las siguientes series:

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 3}{4n - 5n^2}$       b)  $\sum_{n=27}^{\infty} \frac{n^2 + 3}{4n - 5n^2}$       c)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-3)^n + \frac{(-1)^n}{3^n}$       d)  $\sum_{n=0}^{\infty} 32 \frac{1^{6n}}{7^n}$

3. Aplica el criterio de condensación para estudiar el carácter de las series:

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$       b)  $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2}$       c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{\sqrt{n}}$       d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 - n^2}{n^5}$       e)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$

4. Aplica el criterio de comparación estándar para estudiar el carácter de las series:

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1} + 1}$       b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$       c)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\text{sen}(1/n)}{n^2 + 1}$       d)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n + 1}$

5. Aplica el criterio de comparación por paso al límite para estudiar el carácter de las series:

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - n - 1}$       b)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n + 2}{(n + 1)\sqrt{n + 3}}$       c)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(4n^3 + 5)\text{sen}(1/n)}{n^2 3^n}$

6. Aplica el criterio de la raíz para estudiar el carácter de las series:

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5000}{\sqrt{n}}\right)^n$       b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{7n + 4}\right)^{4n-2}$       c)  $\sum_{n=2}^{\infty} (\ln n)^{-n}$

7. Aplica el criterio del cociente para estudiar el carácter de las series:

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$       b)  $1 + \frac{2^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \frac{4^4}{4!} + \dots$       c)  $\sum_{n=0}^{\infty} nr^n$  para  $r \in \mathbb{R}$

8. Aplica el criterio de Raabe para estudiar el carácter de las series:

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$       b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 \cdot 4^n}{(2n)!}$       c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2 + 3n}$

9. Estudia el carácter de las siguientes series numéricas:

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{7n + 4}\right)^{4n-2}$       b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n + 1)^3}$       c)  $\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 4} + \dots$   
d)  $\frac{2}{5} + \frac{2^2 + 1}{2 \cdot 5^2} + \frac{3^2 + 1}{3 \cdot 5^3} + \dots$       e)  $1 + \frac{2!}{2^2} + \frac{3!}{3^3} + \frac{4!}{4^4} + \dots$       f)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + 2}{(n + 1)\sqrt{n + 3}}$   
g)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n \cdot 5^n}$       h)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{(3n + 2) \cdot n^{4/3}}$       i)  $\frac{6}{2\sqrt{2} - 3} + \frac{7}{3\sqrt{3} - 3} + \dots$

$$\begin{array}{lll}
\text{j)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2 - n + 5}{n^3 + 2n} & \text{k)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + \sqrt{n}}{2n^3 - 1} & \text{l)} \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \\
\text{m)} \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n+2} & \text{n)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}^4 n}{n^2} & \text{o)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n^a}{n!} \\
\text{p)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n} & \text{q)} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \ln \frac{n+1}{n-4} \right)^n & \text{r)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^a}{n!} \\
\text{s)} \sum_{n=1}^{\infty} (\ln n)^{-n} & \text{t)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2 + 1} & \text{u)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} \\
\text{v)} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot e^{-n} & \text{w)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \text{sen}^3 n}{n^n} & \text{x)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n+1)^n}
\end{array}$$

10. Estudia la convergencia absoluta o condicional de las siguientes series:

$$\begin{array}{lll}
\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} & \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n} & \text{c)} 1 + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} + \dots \\
\text{d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n} & \text{e)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n \ln n} & \text{f)} 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots
\end{array}$$

11. Suma, si es posible, las siguientes series

$$\begin{array}{llll}
\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^n} & \text{b)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^n} & \text{c)} \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left( \frac{n+1}{n} \right) & \text{d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 3n + 2} \\
\text{e)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} & \text{f)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{2n(n+1)} & \text{g)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{12}{600^n} & \text{h)} \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(n+2)} \\
\text{i)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{5^n} & \text{j)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - 2^n}{3^n} & \text{k)} \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left( \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \right) & \text{l)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{1}{2} \right)^n
\end{array}$$

# Test Series numéricas

## Problemas de Cálculo de I.T.I.

1. Si una serie  $\sum a_n$  es convergente, entonces

a) la sucesión de sumas parciales  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$  tiende a cero

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

c)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0$

d) ninguna de las anteriores

2. Sean  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = l$  y  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = m$ . ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa, en general?

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = l + m$

b)  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = l - m$

c)  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot b_n) = l \cdot m$

d)  $\sum_{n=1}^{\infty} (3a_n + 2b_n) = 3l + 2m$

3. Se considera la serie geométrica  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n}$ . Entonces,

a) no es convergente pues  $\frac{1}{4} < 1$

b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{4}{3}$

c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = 0$

d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{3}$

4. Para la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)}$  se verifica:

a) por el criterio del cociente, la serie es convergente

b) por el criterio de Raabe, la serie es divergente

c) por el criterio del cociente, la serie es divergente

d) por el criterio de Raabe, la serie es convergente

5. Sean  $f(x)$  y  $g(x)$  dos infinitésimos equivalente cuando  $x \rightarrow \infty$ . Se consideran las sucesiones cuyos términos generales son  $a_n = f(n)$  y  $b_n = g(n)$ , para cada  $n \in \mathbb{N}$ . ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

a)  $\sum (a_n - b_n) = 0$

b) las series  $\sum a_n$  y  $\sum b_n$  tienen el mismo carácter

c)  $\sum \frac{a_n}{b_n} = 1$

d) ninguna de las anteriores

6. La serie numérica  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{2^n}$

- a) no es convergente
- b) converge absolutamente
- c) converge condicionalmente
- d) converge numéricamente

7. Supongamos que la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  es convergente. Entonces,  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}$  es

- a) convergente si  $a_n \geq 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$
- b) siempre divergente
- c) convergente si  $a_n \leq 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$
- d) a veces convergente y a veces divergente

8. ¿Para qué valores de  $a > 0$  es convergente la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \left( \left( \frac{\pi}{a} \right)^n \right)$ ?

- a)  $a \geq \pi$
- b)  $a \leq \pi$
- c)  $a = \pi$
- d)  $a > \pi$

9. La serie numérica  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \sqrt[n]{e^2}$

- a) no es convergente
- b) converge absolutamente
- c) converge condicionalmente
- d) es divergente

10. La suma de la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 5n + 6}$  es

- a)  $\frac{1}{3}$
- b)  $\frac{2}{3}$
- c)  $\frac{4}{3}$
- d)  $\frac{1}{2}$