Probabilidad

FENÓMENOS ALEATORIOS

En el mundo real hay fenómenos regidos por leyes de tipo empírico (basadas en la experiencia), lógico o deductivo, en los que el efecto está determinado por ciertas causas. El resultado es previsible, salvo quizás errores de medida. A estos fenómenos se les denomina *fenómenos deterministas.*

Frente a estos fenómenos existen otros muchos que no siguen en su realización unas leyes determinadas. Un fenómeno o experimento se dice *aleatorio* si puede dar lugar a diversos resultados, sin que se pueda anunciar con certeza cuál de éstos va a ser observado en la realización del experimento. Al describir un experimento aleatorio es esencial especificar qué aspecto del resultado nos interesa observar. Dado un experimento aleatorio, el conjunto cuyos elementos son los posibles resultados diferentes del mismo, recibe el nombre de *espacio muestral* asociado al experimento aleatorio. Lo denotaremos por Ω. Así, en el caso del lanzamiento de un dado se toma como espacio muestral $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Atendiendo al número posible de resultados de un experimento aleatorio un espacio muestral puede ser finito, infinito numerable o infinito no numerable.

Se puede definir *suceso* de un experimento aleatorio como un subconjunto de elementos del espacio muestral. Por ejemplo, en el lanzamiento de un dado, un suceso podría ser "salir un número par" que sería el subconjunto $\{2, 4, 6\}$ del espacio muestral correspondiente. Dado que un suceso no es más que un subconjunto del espacio muestral, se pueden definir de la forma clásica en teoría de conjuntos los conceptos de *unión* e *intersección* de sucesos, suceso *complementario* a uno dado, *diferencia* de sucesos (intersección de un suceso con el complementario de otro), así como suceso *imposible* (conjunto vacío), suceso *seguro* (el espacio muestral completo). Se puede demostrar que la clase formada por los sucesos de un experimento aleatorio tiene estructura de álgebra de Boole, ya que contiene al espacio muestral y es estable para las operaciones unión y complementación de sucesos. Por este motivo, se la denomina *álgebra de sucesos* y se denota por $\mathcal{Q}$.

Se define la *frecuencia absoluta* de un suceso A como el número de veces que ocurre dicho suceso en una serie de n repeticiones similares del experimento aleatorio. Se la representa por n_A. La frecuencia absoluta dividida por el número de veces que se realiza el experimento es la *frecuencia relativa*, f_A. Obsérvese que para todo suceso A, se tiene $0 \leq f_A \leq 1$. Como el suceso seguro ocurre siempre, su frecuencia relativa es igual a 1 y la frecuencia relativa del suceso imposible, como nunca ocurre, es igual a 0. Asimismo, dados dos sucesos incompatibles (su intersección es el suceso imposible) como no pueden ocurrir simultáneamente, la frecuencia relativa de su unión es la suma de las frecuencias relativas de cada uno de ellos.

DEFINICIÓN DE PROBABILIDAD

A continuación, se va a definir sobre el álgebra de sucesos asociada a un experimento aleatorio, una función que proporcione una medida de la certeza o incertidumbre en la ocurrencia de los sucesos. Esta medida es la *probabilidad* cuya motivación se puede conisiderar como una abstracción de la frecuencia relativa del mismo en una serie larga de realizaciones del experimento. Se suele decir que la probabilidad de un suceso A es el límite de la frecuencia relativa del suceso cuando el numero de veces que se repite el experimento aleatorio tiende a infinito.

Dado un experimento aleatorio, con espacio muestral Ω y álgebra de sucesos $\mathcal{Q}$, se define la *probabilidad* como una aplicación del álgebra de sucesos $\mathcal{Q}$ en los números reales $\mathbb{R}$

$$P : \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}$$

que satisface los tres axiomas siguientes:

1. $P(A) \geq 0$ para todo $A \in \mathcal{Q}$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ si $A, B \in \mathcal{Q}$ con $A \cap B = \emptyset$.

A continuación vamos a deducir de los axiomas anteriores unas propiedades que están en consonancia con las propiedades que tienen las frecuencias relativas.

a) $P(A^c) = 1 - P(A)$ para todo $A \in \mathcal{Q}$ y siendo A^c el suceso complementario de A.

b) $P(A) \leq 1$ para todo $A \in \mathcal{Q}$

c) $P(\emptyset) = 0$

d) Para A y B dos sucesos cualesquiera de $\mathcal{Q}$, se verifica

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

En la práctica no tiene sentido hablar de probabilidades sin definir previamente la población a la que nos referimos y los sucesos que vamos a considerar. Llamaremos sucesos *elementales* de un experimento a un conjunto de resultados posibles de forma que siempre ocurre uno de ellos y son mutuamente excluyentes, es decir, la ocurrencia de uno implica la no ocurrencia de los demás. Llamaremos sucesos *compuestos* a los construidos a partir de uniones de resultados elementales.

La determinación de probabilidades para sucesos compuestos requiere conocer las de los sucesos elementales. En ocasiones, la simetría de los sucesos elementales sugiere considerarlos equiprobables. Este razonamiento se ha aplicado repetidamente en los juegos de azar a problemas como tirar dados o monedas, extraer naipes de barajas, etc. A veces, el mecanismo generador de los resultados está diseñado para intentar asegurar esta equiprobabilidad, como en la ruleta, por ejemplo.

En estos casos, si existen n sucesos elementales equiprobables, la probabilidad de cada uno de ellos debe ser $\frac{1}{n}$, para asegurar que la suma total sea uno. La probabilidad de un suceso A que contiene f sucesos elementales será $\frac{f}{n}$, lo que da lugar a la regla:

$$P(A) = \frac{\text{casos favorables}\,(f)}{\text{casos posibles}\,(n)}$$

Esta regla sólo debe utilizarse cuando la simetría esté confirmada por el mecanismo generador o por la evidencia empírica.

MÉTODOS DE RECUENTO. COMBINATORIA

Variaciones sin repetición

Sea E un conjunto de n elementos.

Llamaremos *variaciones sin repetición de* n *elementos tomados de* k *en* k al número de ordenaciones distintas de k elementos no repetidos de E. Dos disposiciones serán distintas si están formadas por elementos distintos o si los elementos están dispuestos en orden distinto. El ORDEN IMPORTA.

En el primero de los lugares de una lista ordenada con k posiciones, podemos colocar cualquier elemento de entre los n posibles. En segundo lugar, podemos colocar cualquiera de entre los $n-1$ restantes. En tercer lugar, cualquiera de entre los $n-2$ restantes. Así, hasta llegar al lugar k-ésimo en donde podemos colocar cualquier elemento de entre los $n-k+1$ restantes. Por tanto:

$$V_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Permutaciones

Llamaremos *permutaciones de* n *elementos* a las variaciones sin repetición de n elementos tomados de n en n, es decir, al número de ordenaciones posibles de todos los elementos de E. Por tanto

$$P_n = V_n^n = n!$$

Variaciones con repetición

Llamaremos *variaciones con repetición de* n *elementos tomados de* k *en* k al número de ordenaciones distintas de k elementos repetidos o no repetidos de E.

En el primero de los lugares de una lista ordenada con k posiciones, podemos colocar cualquier elemento de entre los n posibles. En el segundo lugar, se pueden volver a colocar cualquiera de los n elementos y así, en las k posiciones posibles. Por tanto

$$VR_n^k = n^k$$

Combinaciones sin repetición

Llamaremos *combinaciones sin repetición de* n *elementos tomados de* k *en* k al número de subconjuntos distintos de k elementos que se pueden formar con los elementos de E. El ORDEN NO IMPORTA en el sentido de que se consideran dos subconjuntos distintos cuando están formados por distintos elementos. Por ejemplo, $\{3,4,5\}$ y $\{4,3,5\}$ se consideran iguales.

Si en las combinaciones se permutan los elementos entre sí se obtienen las variaciones, por tanto la relación entre el número de variaciones y el de combinaciones viene dado por $V_n^k = C_n^k P_k$. Esto permite deducir el número de combinaciones, a saber

$$C_n^k = \frac{V_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}$$

PROBABILIDAD CONDICIONADA. INDEPENDENCIA

La frecuencia relativa de un suceso A condicionada a la ocurrencia de otro suceso B se define considerando únicamente los casos en los que aparece B y viendo en cuántos de estos casos ocurre A; es, por tanto, igual a la frecuencia de ocurrencia conjunta de A y B, partida por el número de veces que aparece B. Dividiendo numerador y denominador por el número de veces que se realiza el experimento, la frecuencia de A condicionada a B se puede expresar

$$f_{A|B} = \frac{f_{A\cap B}}{f_B}$$

Motivándonos en esta expresión, exigiremos esta misma propiedad a la probabilidad y se define la *probabilidad de A condicionada a B* por

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

donde $P(B) > 0$. Se comprueba fácilmente que la probabilidad condicionada cumple los tres axiomas de la definición de la función de probabilidad.

Análogamente se define la probabilidad de B condicionada a A como

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

De forma que siempre se tienen dos expresiones distintas para la probabilidad de la intersección de dos sucesos:

$$P(A \cap B) = P(A \mid B)P(B) = P(B \mid A)P(A)$$

Diremos que dos sucesos son *independientes* si el conocimiento de la ocurrencia de uno no modifica la probabilidad de aparición del otro. Por tanto, A es independiente de B si

$$P(A \mid B) = P(A)$$

Observando la definición de probabilidad condicionada, se deduce que A es independiente de B si y sólo si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

De donde se deduce que ser A independiente de B es equivalente a que B sea independiente de A.

Esta definición se generaliza para cualquier número de sucesos: diremos que los sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son independientes si la probabilidad conjunta de cualquier subconjunto que pueda formarse con ellos es el producto de las probabilidades individuales.

TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL. FÓRMULA DE BAYES

Consideremos un conjunto de sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ del álgebra de sucesos $\mathcal{Q}$ cuya unión es el suceso seguro y son mutuamente excluyentes. Un conjunto de sucesos con estas dos propiedades recibe el nombre de *sistema completo de sucesos*.

Teorema de la probabilidad total. *Sea B un suceso cualquiera $B \in \mathcal{Q}$ y un sistema completo de sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tales que $P(A_i) > 0$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Entonces,*

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i)P(A_i)$$

Esta fórmula recoge la siguiente idea: si el suceso B puede ocurrir por alguna de las causas A_i, pero no se sabe cuál, hay que contemplarlas todas. Entonces, la probabilidad de B es la suma de las probabilidades de la intersección de B con cada uno de los A_i, lo cual coincide (según se vió en el apartado anterior) con el producto $P(B \mid A_i)P(A_i)$.

Consideremos ahora, bajo las mismas condiciones del teorema anterior, que estamos interesados en conocer la probabilidad de que, sabiendo que ha ocurrido el suceso B, la causa que lo ha producido sea el suceso A_j. Expresado analíticamente, lo que queremos calcular es $P(A_j \mid B)$.

Fórmula de Bayes: *Sea B un suceso cualquiera $B \in \mathcal{Q}$ y un sistema completo de sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tales que $P(A_i) > 0$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Entonces,*

$$P(A_j \mid B) = \frac{P(B \mid A_j)P(A_j)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i)P(A_i)}$$

Obsérvese que la fórmula de Bayes es una consecuencia inmediata de la definición de probabilidad condicionada y el teorema de la probabilidad total.