
CAPITULO 6.

Planificación de Velocidades.

6.1. Introducción.

Según el planteamiento propuesto, el problema de la generación de trayectorias se ha dividido en dos tareas independientes: i) la planificación espacial y ii) la planificación temporal. En los capítulos precedentes se ha propuesto un método para la resolución del primer problema; la generación de un camino, libre de obstáculos y admisible desde el punto de vista cinemático. Este se define como un conjunto de configuraciones $Q=\{q_1, \dots, q_n\}$ construido a partir de la discretización de una función camino $P(s)$. Cada configuración $q_i=(x_i, y_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i)$ perteneciente a Q son las consignas que se entregan al seguidor de caminos (Martinez, 1.994) para que realice la ejecución del mismo.

En este capítulo se aborda la segunda de las tareas expuestas: el problema de la planificación de velocidades. La necesidad de realizar esta labor obedece a la obligación de especificar una velocidad de referencia. De modo que ésta sea utilizada por el algoritmo de seguimiento para la ejecución del camino planificado. Dicha referencia se define como una función $V(s)$ que al ser discretizada en un conjunto de velocidades W y combinado este último con Q , forman la trayectoria \tilde{Q} .

La función velocidad posee ciertas limitaciones impuestas por las características cinemáticas y dinámicas intrínsecas al vehículo. Por otro lado, puede sufrir restricciones de tipo operacional, como realizar la ejecución del camino minimizando cierta función de coste. Así, se pueden plantear como metas reducir al mínimo el consumo energético del vehículo o recorrer el camino en el menor tiempo posible evitando los eventuales obstáculos móviles que se encuentran en el entorno (Kant y Zucker, 1.986). Estas cuestiones se reflejan como la reducción del rango de variación de la función $V(s)$ a lo largo del camino. Por ello, surge la necesidad de realizar la planificación de la velocidad del vehículo para imprimir en cada instante el valor adecuado de la misma.

De este modo, se define en primer lugar el plano de fase espacio-temporal como representación de la función velocidad $V(s)$ (apartado 6.2.), la cual se especificará a partir de una curva espacio-temporal (apartado 6.3.). Sobre esta última deben considerarse una serie de restricciones que la habiliten para ser aplicada en la navegación. Así pues, resulta oportuno clasificar las limitaciones de la velocidad del vehículo según las características del mismo y del camino (apartado 6.4.), para, en segundo lugar, emplearlas en la construcción de una curva espacio-temporal segura (apartado 6.5.). Todo el desarrollo de este capítulo concluye en la construcción de un algoritmo para la transformación de un camino, generado por el método expuesto en el capítulo quinto, en trayectoria (apartado 6.6.). Por último, se presentan una serie de conclusiones y un conjunto de experimentos sobre el robot móvil autónomo RAM-1 (apartado 6.7.).

6.2. Planificación en el plano de fase espacio-velocidad.

En la construcción de la trayectoria resulta esencial añadir a cada postura del camino un componente de velocidad. El valor de ésta se encuentra restringido en cada posición del camino debido a las características cinemáticas y dinámicas del vehículo. Por tanto, resulta necesario realizar un estudio de los máximos permitidos a lo largo del camino antes de efectuar la construcción de la función velocidad. Este estudio se materializa en el uso del plano de fase espacio-velocidad, en el cual se reproducen las distintas restricciones que se han de considerar en la planificación de velocidades. Como quedó patente en el segundo capítulo, mediante esta representación se define una región de velocidades admisibles que pueden ser utilizadas en la planificación. De este modo, la función velocidad debe incluirse en el interior de la mencionada región. De igual forma resulta posible definir el plano de fase espacio-aceleración, en el que se corroboran las restricciones que afectan a la primera derivada de la velocidad. Sin embargo, ya que estas limitaciones se valoran mediante la imposición de ciertas condiciones a la función velocidad, esta última simbolización carece de utilidad.

La primera aproximación resulta del empleo de una función velocidad constante de igual valor a la velocidad máxima a la que el vehículo puede recorrer el camino sin violar la más restrictiva de las limitaciones. El problema de las aceleraciones inicial y final se soluciona mediante el uso de una función de atenuación al comienzo y fin del camino (Nelson y Cox, 1.990).

En la figura 6.1 se representan en el plano de fase espacio-velocidad dos restricciones de la velocidad del vehículo, anotadas como $R_{v1}(s)$ y $R_{v2}(s)$. De ellas, la primera presenta el valor mínimo V_{max} que será utilizado como cota superior de velocidad en la construcción de la función $V(s)$. El uso de este límite garantiza que se verifique la más rigurosa de las restricciones y, por tanto, que la trayectoria generada a partir de este perfil de velocidades sea admisible. No obstante, aunque consigue realizar una navegación segura al no traspasar ninguna limitación cinemática o dinámica, resulta imposible imponer el cumplimiento de restricciones operacionales, como minimizar el tiempo de ejecución del camino.

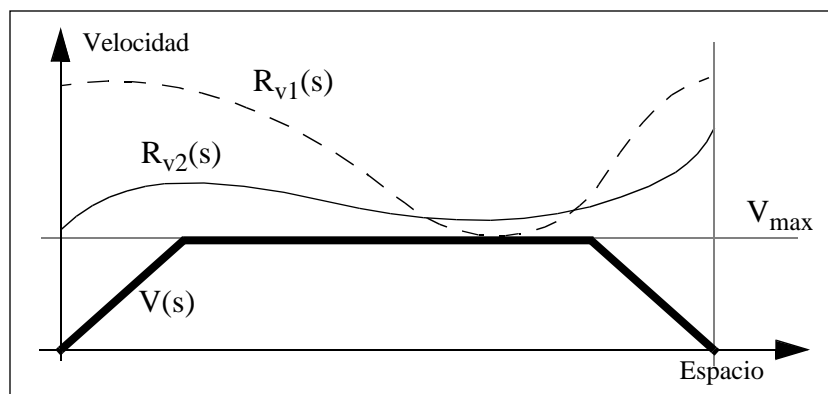


Figura 6.1. Planificación temporal mediante el uso de una función constante.

Un planteamiento más flexible resulta del uso de una referencia de velocidad variable. Esta puede ser construida a partir de la restricción más rigurosa de la velocidad a lo largo de todo el camino. De esta forma, se hace coincidir la curva de velocidad asignada al camino con la mencionada restricción. En la figura 6.2, la restricción $R_{v2}(s)$ será la utilizada como función de velocidad $V(s)$.

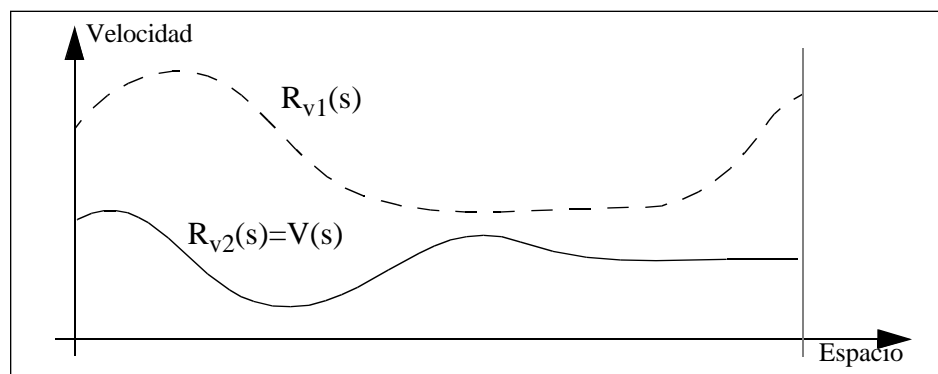


Figura 6.2. Planificación de velocidades mediante el uso de la restricción más rigurosa.

De este modo, se construye el conjunto W sin otro imperativo a partir de Q , añadiendo a cada postura q_i de este último, el valor de velocidad requerido según la restricción (Shin, 1.990). Todo ello se ilustra en la expresión (6.1).

$$\tilde{q}_i = (x_{i'} \ y_{i'} \ \dot{\theta}_{i'} \ \ddot{\theta}_{i'} \ V(s_i)) \quad (6.1)$$

En el supuesto de no existir una restricción que sea la más rigurosa a lo largo de todo el camino (como es el caso presentado en la figura 6.1), entonces la expresión (6.1) se transforma en la siguiente:

$$\tilde{q}_i = (x_{i'} \ y_{i'} \ \dot{\theta}_{i'} \ \ddot{\theta}_{i'} \ \text{MIN}(R_{v1}(s_i), \dots, R_{vn}(s_i))) \quad (6.2)$$

Donde MIN denota la función mínimo y $\{R_{v1}, \dots, R_{vn}\}$ es el conjunto de las n restricciones consideradas en la planificación de la velocidad (Shiller y Gwo; 1.991). Tomando como ejemplo las restricciones mostradas en la figura 6.1, la representación en el plano de fase de la función $V(s)$ se muestra con trazo grueso en la figura 6.3.

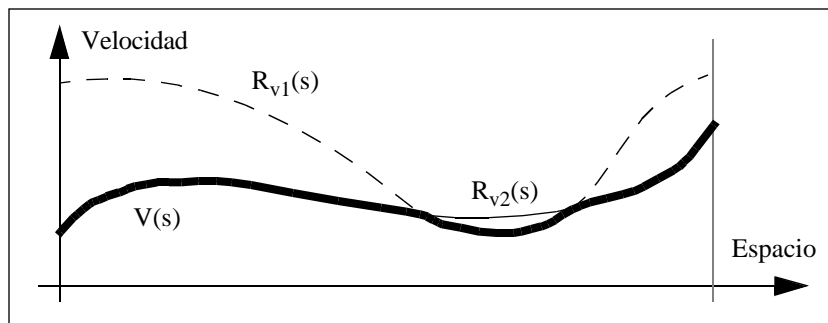


Figura 6.3. Función de velocidad variable según las restricciones presentadas en la figura 6.1.

Esta última metodología, conlleva la realización de una planificación de la velocidad más versátil que la simple aplicación de una función constante. No obstante, se observa cierta dependencia de la referencia de velocidad con respecto a las características del camino y del vehículo, lo que implica que se ha de prestar especial atención a la construcción del primero. El empleo de la expresión (6.1) ó (6.2) en un camino con malas características cinemáticas puede infringir dificultades adicionales al seguidor de caminos para realizar su tarea. Asimismo, resulta imposible imponer restricciones de aceleración a la curva de velocidad.

Por los motivos apuntados, resulta de gran interés la construcción de una referencia de velocidad que solvete los inconvenientes presentados en las dos metodologías expuestas, amén de poseer ciertas propiedades sobre su primera y segunda derivada.

6.3. La curva espacio-temporal.

La determinación de una trayectoria sobre un camino exige la construcción de una curva de velocidad $V(s)$ parametrizada por su longitud de arco. Esta se define en el plano de fase espacio-velocidad donde se encuentran representadas las restricciones de esta última variable. La especificación de la curva debe llevarse a cabo de tal forma que respete las limitaciones existentes y lo suficientemente independiente como para poder imponerle ciertas características de aceleraciones y sacudidas. De este modo, la trayectoria surge de la fusión de la curva $P(s)$, que representa el camino, y de una función velocidad $V(s)$.

Dadas las funciones de camino y de velocidad, ambas parametrizadas por la longitud del arco, la construcción de la configuración de \tilde{Q} , que denota cuando el vehículo se halla a una distancia s_p del punto de comienzo sobre el camino $P(s)$ y con una velocidad $V(s_p)$, exige la utilización conjunta de ambas curvas, como se muestra en la figura 6.4.

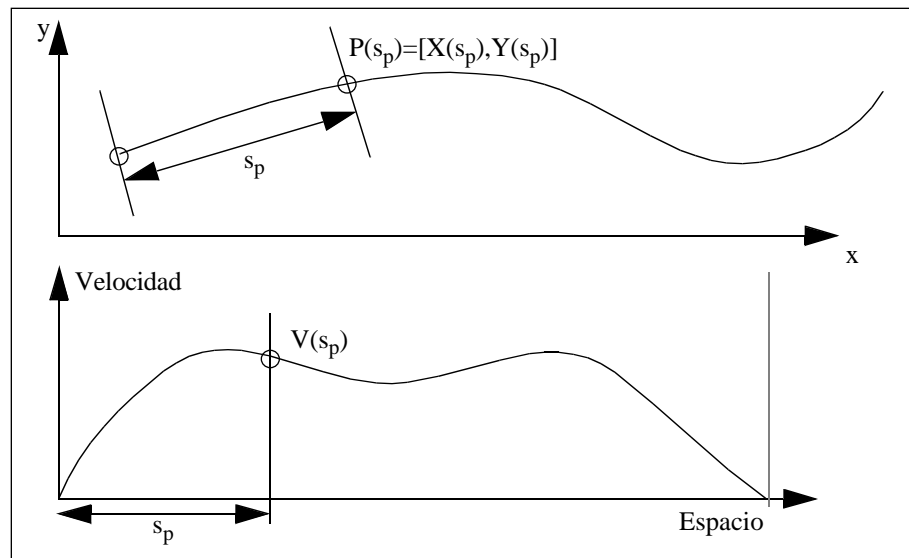


Figura 6.4. Funciones camino y velocidad.

En la mencionada figura, s_p representa la longitud de arco recorrida sobre el camino, de suerte que la postura temporal de la trayectoria se determina por los valores $P(s_p)$ y $V(s_p)$. La utilización de ambas curvas de forma simultánea detalla en cualquier postura del camino la posición y velocidad del vehículo.

Abordar de forma directa la construcción de una función de velocidad $V(s)$, para que cumpla las restricciones expresadas por $\{R_{v1}, \dots, R_{vn}\}$, resulta costoso. Por ello, la especificación de la curva buscada se realiza mediante la composición de dos funciones.

Sea $F_s(t)$ una aplicación que representa el espacio recorrido por el vehículo con respecto al tiempo, a la cual se denominará curva espacio-temporal, ya que relaciona ambas magnitudes. De este modo, la función tiempo-velocidad $V(t)$ resulta de efectuar la derivada con respecto al tiempo de la primera:

$$V(t) = \frac{d}{dt}F_s(t) \quad (6.3)$$

De manera que al emplear un total de T unidades de tiempo en recorrer una distancia s_{tot} , ambas funciones se relacionan por la siguiente expresión:

$$F_s(t) = \int_0^T V(t)dt = s_{tot} \quad (6.4)$$

La construcción de la curva de velocidad $V(s)$ representada en el plano de fase espacio-velocidad, se realiza mediante la composición de las funciones antes mencionadas:

$$V(s) = V(F_s^{-1}(s)) \quad (6.5)$$

Donde $F_s^{-1}(s)$ representa la función inversa de la curva espacio-temporal. Debe prestarse especial atención a que en su definición la curva reúna las características precisas para la correcta construcción de $V(s)$, según la expresión (6.5). Así, se exige entre otras propiedades, la obligatoriedad de poseer inversa y ser monótona creciente.

Las restricciones representadas en el plano de fase espacio-velocidad se constituyen como un conjunto de funciones que acotan los posibles valores de velocidad, aceleración y sacudida. Sin embargo, porque el camino se define como un conjunto de configuraciones Q , obtenido a partir de la función camino $P(s)$, dichas limitaciones se consideran constantes entre dos posturas. De este modo, aparecen representadas sin ninguna pérdida de información mediante un conjunto de reducciones $R=\{r_1, \dots, r_n\}$. Con ello, se establece una aplicación biyectiva entre el conjunto de configuraciones Q y R , que asigna a cada postura q_i una tupla r_i . La estructura de cada elemento r_i resulta formada por los siguientes componentes:

- \mathbf{s}_i : Distancia recorrida a lo largo de la curva que representa el camino hasta la postura actual q_i .
- \mathbf{v}_i : Valor de la limitación más estricta de velocidad en la postura actual q_i .
- \mathbf{a}_i : Valor de la restricción de aceleración más rígida en la postura presente q_i .
- \mathbf{u}_i : Valor de la restricción de sacudida más rigurosa en la postura actual q_i .

- t_i : tiempo previsto para el alcance de la postura q_i , donde las restricciones especificadas deben ser satisfechas.

Los componentes de la tupla, además de especificar las restricciones de velocidad, aceleración y sacudida, expresan de forma explícita la relación existente entre el espacio y el tiempo mediante el par (s_i, t_i) . De este modo integra la información proporcionada por las restricciones cinemáticas y dinámicas (representadas en el plano de fase espacio-velocidad) y las operacionales (representadas en el plano espacio-temporal).

Según del grado de consecución por parte de la función espacio-temporal de las reducciones del conjunto R , surgen los problemas de las restricciones de orden cero y de orden uno (Guenter y Parent, 1.990):

- **Problema de las restricciones orden cero:** La curva espacio-temporal garantiza, de cada tupla r_i , el cumplimiento de los elementos $\{s_i, t_i\}$. El resto de restricciones se obtiene mediante la imposición de ciertas condiciones a sus derivadas.

Un ejemplo válido resulta de la construcción de una curva espacio temporal mediante la consideración de una velocidad o aceleración constante, como puede verse reflejado en el ejemplo de la figura 6.5. En ella, se puede apreciar que la curva espacio-temporal se ha construido considerando una variación lineal de la velocidad.

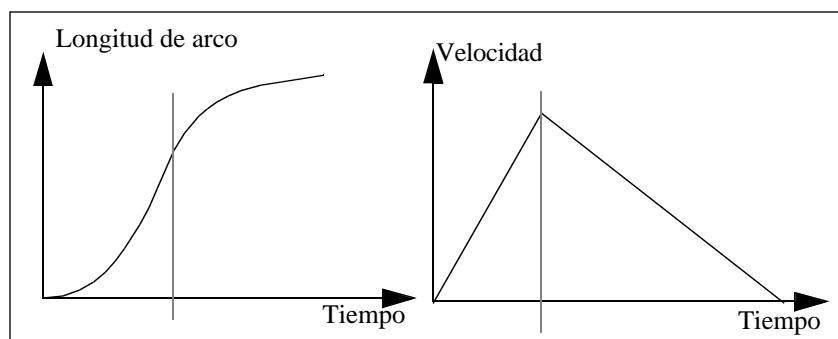


Figura 6.5. Curva espacio-temporal y velocidad-tiempo del problema de orden cero.

- **Problema de las restricciones de orden uno:** Requiere satisfacer de las restricciones los componentes $\{s_i, v_i, t_i\}$. De esta manera, se especifican las tres primeras limitaciones y se fuerzan las de orden mayor a ser continuas. Con ello, se obtiene una velocidad y una posición de forma explícita, mientras se

establece una aceleración constante dentro de la curva espacio-temporal. Con ello se garantiza la posibilidad de control de las mencionadas magnitudes en tiempos específicos a lo largo de la curva.

La planificación de velocidades en robots móviles, se define como un problema de restricciones de orden uno, en el que se satisfacen los componentes $\{s_i, v_i, t_i\}$ de r_i . Los valores de los mencionados componentes para cada postura se determinan a partir del estudio de las características del camino, entorno y vehículo. La aceleración ha de mantenerse continua, de variación lineal y acotada por ciertos límites.

La aplicación elegida para representar la curva espacio-temporal es un polinomio de tercer grado, ya que reúne las condiciones del problema de las restricciones de primer orden, y posee la función inversa. De modo que el enlace de dos tuplas r_i y r_j no consecutivas del conjunto de reducciones R , tal que $s_i < s_j$ se realiza mediante la curva $ij(t)$:

$$ij(t) = \begin{bmatrix} t_i^3 & t_i^2 & t_i & 1 \\ t_j^3 & t_j^2 & t_j & 1 \\ 3t_i^2 & 2t_i & 1 & 0 \\ 3t_j^2 & 2t_j & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} i \\ 0 \\ i \\ i \\ i \\ 2 \\ i \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_i \\ s_j \\ v_i \\ v_j \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

Los coeficientes $\{i_0, i_1, i_2, i_3\}$ se calculan con el objeto de satisfacer las restricciones de espacio, tiempo y velocidad dadas por las tuplas $\{s_i, v_i, t_i\}$ y $\{s_j, v_j, t_j\}$ (ver figura 6.6). La aceleración se obtiene a partir de la curva especificada, si bien en su definición no aparece ninguna reducción que la limite. Por ello, la ecuación (6.6) verifica el problema de las restricciones de primer orden, sin menoscabo de verificar la relación (6.4). La calidad de la aceleración, es decir, que garantice las reducciones, depende del tiempo especificado para recorrer el espacio comprendido entre las dos tuplas.

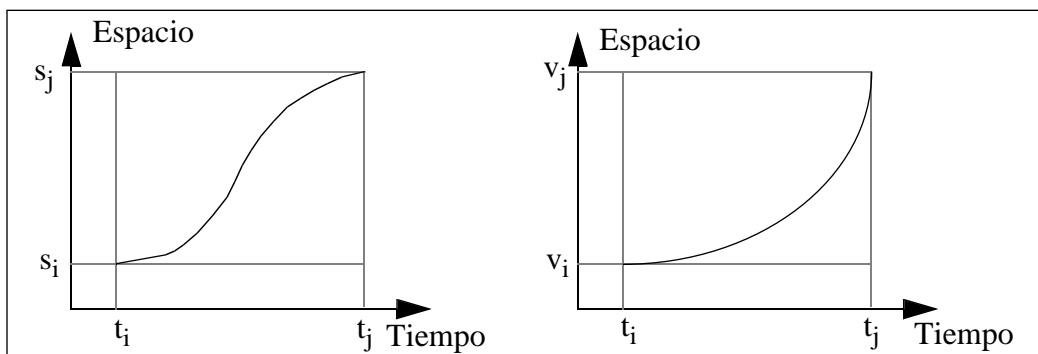


Figura 6.6. Curva espacio temporal y su derivada en el problema de las restricciones de orden uno.

6.4. Restricciones de la velocidad

La construcción de la curva espacio-temporal exige un paso previo de especificación de las restricciones asociadas al camino. Estas se representan en forma de un conjunto R de reducciones, en el que la tupla r_i limita la velocidad, aceleración y sacudida del vehículo en la postura i -ésima del camino. Asimismo, los componentes (s_i, t_i) se eligen en función de su capacidad para garantizar las especificaciones del problema de orden uno, según se indica en la expresión (6.4).

De este modo, la asignación de los valores que delimitan la velocidad y la aceleración del vehículo en cada postura se realiza a partir del estudio del modelo dinámico y cinemático del vehículo, que denotan el comportamiento del mismo ante una determinada situación. Las restricciones v_i y a_i de la tupla se calculan como la velocidad y la aceleración mínimas de todas las restricciones evaluadas en la configuración afectada q_i . Si $\{vr_{i0}, vr_{i1}, \dots, vr_{ip}\}$ son las p restricciones de la velocidad asociadas a una postura y $\{ar_{i0}, ar_{i1}, \dots, ar_{iq}\}$ son las q restricciones de la aceleración, los valores v_i y a_i que se asignan a una tupla r_i perteneciente a R , se definen mediante la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} v_i &= \text{MIN}(vr_{i0}, vr_{i1}, \dots, vr_{ip}) \\ a_i &= \text{MIN}(ar_{i0}, ar_{i1}, \dots, ar_{iq}) \end{aligned} \quad (6.7)$$

La función mínimo MIN evalúa el máximo valor de velocidad o aceleración que están permitidos en una determinada postura. De esta forma, el conjunto de todas las restricciones de velocidad asociadas a un camino se considera como una matriz de dimensión $p \times n$, y el de las aceleraciones como una matriz de $q \times n$. La operación *mínimo* proyecta cada una de estas matrices en un vector, donde el i -ésimo componente será asignado al elemento correspondiente de la i -ésima tupla del conjunto de reducciones R .

Las limitaciones de la velocidad y la aceleración que afectan a la navegación del vehículo se clasifican en cuatro grupos según su naturaleza (Prado y otros; 1.994; Simón 1.994):

- Consideraciones de construcción.
- Consideraciones cinemáticas.
- Consideraciones dinámicas.
- Consideraciones operacionales.

Esta clasificación corresponde a un nivel más profundo de estudio que la realizada en el segundo capítulo de esta tesis. En ella los tres primeros puntos corresponden a las restricciones debidas a las características físicas del vehículo, y el último punto resulta como consecuencia de los requerimientos operacionales. En los siguientes subapartados se describen cada uno de los mencionados grupos. El estudio de la aplicación de cada una de las restricciones al robot autónomo móvil RAM-1 en concreto, se realiza en el apéndice A de esta tesis.

6.4.1. Consideraciones de construcción.

El epígrafe se refiere a las limitaciones introducidas por las características del sistema de locomoción del vehículo. Así pues, según las propiedades de los motores y de la cadena de tracción, se dotará al vehículo de una velocidad y aceleración máximas. De este modo, se distinguen las siguientes limitaciones:

- i) **Limitación mecánica de la velocidad:** El sistema de tracción proporciona al vehículo una velocidad máxima en función de la actividad de los motores de tracción.

Por lo referido, la velocidad máxima V del punto de guía resulta acotada por la siguiente expresión:

$$V = \frac{v_n}{i} \cdot R_L \quad (6.8)$$

En ella v_n es la velocidad nominal del motor, i es la reducción total de la cadena de transmisión y R_L es el radio de la rueda bajo carga.

- ii) **Limitación mecánica de la aceleración:** El valor superior de la aceleración en el punto de guía queda determinado por el par máximo que pueden desarrollar los motores de tracción.

La aceleración a debe vencer las resistencias pasivas de la transmisión, la inercia del vehículo y la inercia de las masas giratorias. Por lo tanto, el valor de la misma se define mediante la siguiente expresión:

$$\frac{I \cdot a}{g} = \frac{T}{R_L} \quad (6.9)$$

De esta manera, P denota el peso del vehículo, T el par del motor, η es el rendimiento de la transmisión y J es el coeficiente combinado de inercia de las masas en rotación de la cadena de potencia. Así, la aceleración resulta acotada por la expresión:

$$a \leq \frac{gT}{R_L P} \quad (6.10)$$

Por otro lado, la aceleración máxima de frenado se calcula mediante el uso de la expresión:

$$a_b = \frac{T_b g}{R_L P} \quad (6.11)$$

Donde T_b es el par máximo de frenado que se puede transmitir a las ruedas.

6.4.2. Consideraciones cinemáticas

Las consideraciones cinemáticas vienen definidas por el modelo cinemático del vehículo empleado. Este delimita la velocidad y la aceleración que puede alcanzar el punto de guía con respecto a la velocidad de cada una de sus ruedas. Las limitaciones que afectan a la velocidad y la aceleración dentro de este grupo resultan como:

- i) **Limitación cinemática de la velocidad:** La velocidad angular del punto de guía debe ser idéntica a la velocidad angular de cada una de las ruedas cuando el vehículo describe un camino de curvatura R . De este modo, si V es la velocidad del punto de guía, entonces se debe verificar la siguiente relación:

$$V \leq \frac{\|\vec{R}\|}{\|\vec{R} + \vec{d}_i\|} V_i \quad (6.12)$$

Donde V_i define la velocidad máxima de la rueda i -ésima evaluada mediante la expresión (6.8), d_i su vector distancia, y R el vector radio del círculo de osculación definido mediante R (ver figura 6.7).

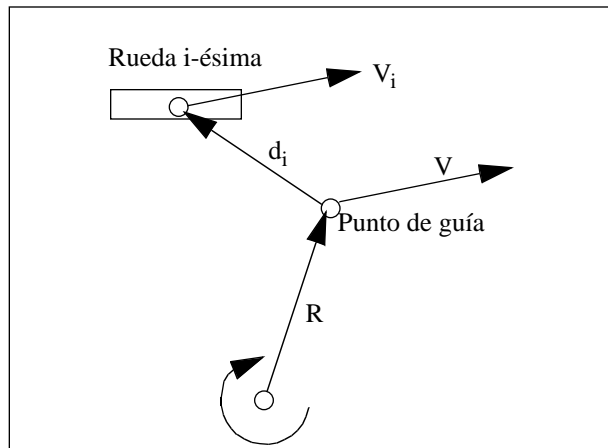


Figura 6.7. Velocidad del punto de guía según la limitación cinemática.

- ii) **Limitación cinemática de la aceleración:** La máxima aceleración del punto de guía se obtiene mediante la aplicación de la derivada con respecto al tiempo de la expresión (6.12). Si los tramos de camino con curvatura elevada se recorren a baja velocidad, la aceleración se aproxima mediante la expresión:

$$a = \frac{\|\dot{\vec{R}}\|}{\|\vec{R} + \vec{d}_i\|} a_i \quad (6.13)$$

6.4.3. Consideraciones dinámicas.

Se entiende por consideraciones dinámicas las que involucra la dinámica del sistema de tracción y dirección del vehículo. Asimismo, se considera las fuerzas que actúan sobre el vehículo que provocan una desviación de la trayectoria prevista. Con la debida atención a estas dos cuestiones para construir el perfil de velocidades se logra mejorar el error de seguimiento del camino.

- i) **Máximo rango de variación de la curvatura:** El sistema de dirección del vehículo precisa cierto tiempo para responder ante un cambio de curvatura. Debido a la variedad de elementos que pueden llegar a formar parte del mismo, tanto mecánicos como electrónicos, la elaboración de un modelo puede resultar de gran complejidad.

De esta forma, en la mecánica de dirección se incorpora un bucle de control interno encargado de realizar la orientación de las ruedas directrices según

ciertas consignas generadas por el bucle de control externo. La misión de este último consiste en trasladar el vehículo hasta cierta posición en el plano, de acuerdo con el camino trazado (Shin, 1.990; Martínez, 1.994). Estos tres niveles del sistema de dirección se reflejan en la figura 6.8.

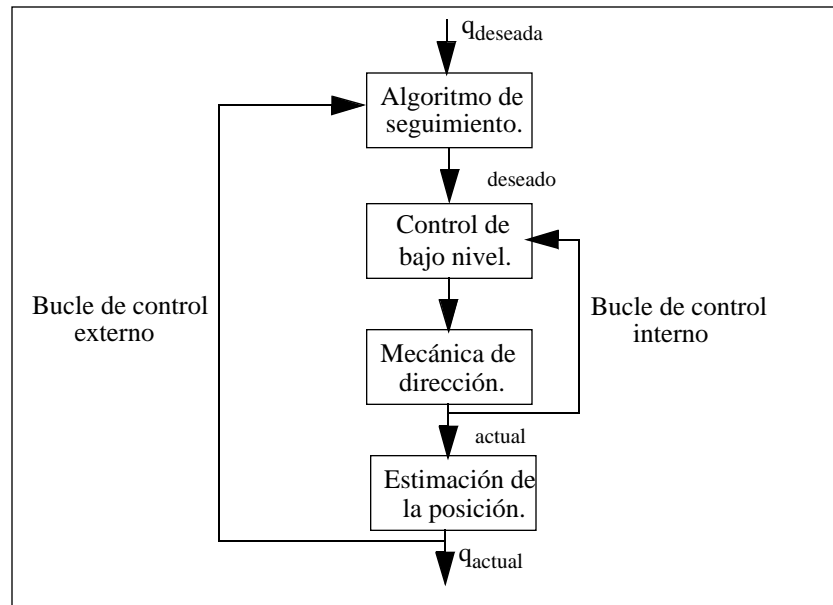


Figura 6.8. Componentes del sistema de dirección.

La mecánica emplea cierto tiempo en dotar a las ruedas de dirección el ángulo deseado. Según esta consideración, la velocidad del vehículo debe estar limitada por esta circunstancia. Si se denomina ganancia máxima de curvatura G_m a la velocidad máxima de orientación de las ruedas de dirección, entonces la velocidad del punto de guía del vehículo para seguir un camino de curvatura $\kappa(s)$, se expresa mediante la siguiente relación (Muñoz y otros, 1994; Prado y otros, 1.994; Simón, 1.994):

$$v \leq \frac{G_m}{\kappa} \quad (6.14)$$

Sin embargo, la expresión (6.14) deja de tener validez al introducir el bucle de control de bajo nivel, ya que modifica la respuesta del sistema de dirección de forma sustancial. Como suele ser habitual, éste se diseña con objeto de aproximar el comportamiento de la mecánica de dirección al de un sistema de primer orden dentro de una zona de trabajo. Esto posibilita el empleo de un modelo simple como arquetipo fiable del sistema de dirección (Shin, 1.990;

Martínez, 1.994). De esta forma, su dinámica se puede expresar de una manera tradicional mediante una función de transferencia o una ecuación diferencial:

$$\frac{actual(s)}{deseada(s)} = \frac{1}{1 + Ts} \quad (6.15)$$

$$actual + \frac{1}{T} actual = \frac{1}{T} deseada$$

Donde T define la constante de tiempo del sistema y θ representa la dinámica del ángulo de la rueda de dirección del vehículo. Por todo ello, sería deseable no introducir una nueva consigna al controlador del sistema de dirección hasta que no alcance un estado estable. Ante lo expuesto, la velocidad máxima en un tramo de camino de curvatura variable resulta aquella que facilite al controlador una consigna en un tiempo igual o superior al tiempo de establecimiento del sistema. Si L es la distancia entre dos posturas consecutivas de un camino, la velocidad que verifica esta propiedad se expresa mediante la siguiente inecuación:

$$V \leq \frac{L}{5T} \quad (6.16)$$

El empleo de la velocidad obtenida mediante la expresión (6.16), sólo resulta aplicable en el seguimiento de caminos explícitos en bucle abierto, sin introducir el bucle exterior de control (Shin, 1.990).

El cierre de este último origina una dificultad en establecer una relación explícita entre la curvatura de la postura actual y la máxima velocidad recomendada para alcanzarla. Esta situación resulta como consecuencia de la dependencia del comportamiento del sistema de dirección hacia el algoritmo de seguimiento empleado en este nivel superior. Por tanto, la obtención de la relación entre la velocidad y la curvatura atendiendo al rango máximo de la variación de la misma, debe elaborarse para un algoritmo de seguimiento en particular, mediante el estudio empírico del vehículo ante distintas situaciones.

- ii) **Interacción de las ruedas del vehículo con el suelo:** Cuando el vehículo se desplaza a cierta velocidad, aparecen unas fuerzas laterales que tienden a desviarlo de la trayectoria prevista. Estas fuerzas provocan la deformación de

las ruedas del vehículo en contacto con el suelo, y como resultado de ello surgen los microdeslizamientos.

Este último fenómeno se representa como un ángulo de deriva del vector velocidad del punto de guía del vehículo con respecto a su eje longitudinal. Resulta factible establecer una relación lineal, en aquellos casos de fuerzas laterales pequeñas F_L y el ángulo de deriva de cada rueda, mediante el uso del coeficiente de rigidez de deriva C (Shin, 1.990; Simón 1.994):

$$F_L = C \quad (6.17)$$

En la figura 6.9 se representan en el modelo de la bicicleta la fuerza lateral y los ángulos de deriva de las ruedas delantera y trasera. En el mencionado arquetipo la acción de la fuerza lateral origina el desplazamiento de un ángulo δ_i del vector velocidad V_i de la rueda i -ésima. Por tanto, el vector velocidad V del punto de guía acusa un ángulo de deriva con respecto al eje longitudinal del vehículo.

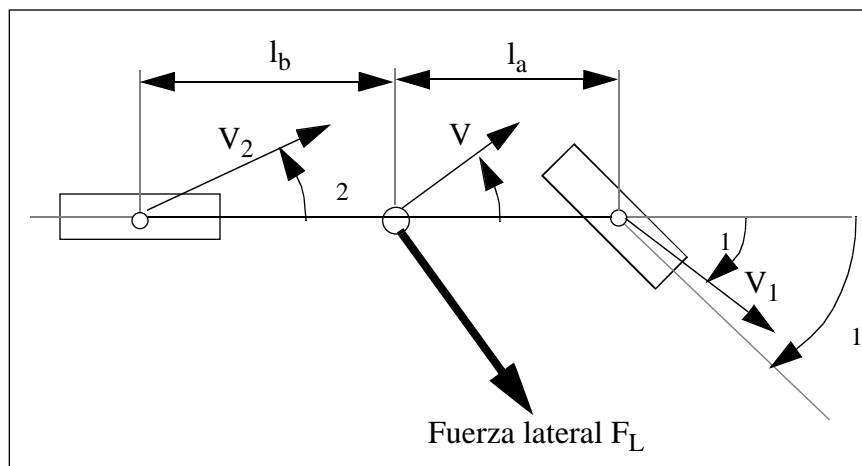


Figura 6.9. Fuerza lateral y ángulo de deriva del vehículo.

La fuerza lateral se halla distribuida entre todas las ruedas en contacto con el suelo, por lo que la expresión (6.17) se descompone según las derivas de cada una de ellas en particular:

$$F_L = \sum_{i=1}^n (C_i \delta_i \cos \delta_i) \quad (6.18)$$

Donde n es el número de ruedas en contacto con el suelo, y δ_i denota el ángulo de direccionamiento con respecto al eje longitudinal del vehículo de la rueda de dirección.

Por otra parte, cuando el vehículo en cierto instante navega sobre un camino de curvatura R , la fuerza lateral que actúa sobre el mismo resulta:

$$F_L = \frac{P}{g} V^2 \quad (6.19)$$

Por tanto, la limitación del error de microdeslizamientos conlleva la acotación del valor de los ángulos δ_i originados por la fuerza lateral que actúa sobre el vehículo. De acuerdo con ello, y mediante la combinación de las fórmulas (6.18) y (6.19) se obtiene la relación:

$$V \leq \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (C_{\delta_i} \cos \delta_i) g}{P}} \quad (6.20)$$

Por lo general, el límite de velocidad se expresa como la función de un ángulo máximo de deriva deseado δ_{max} con respecto al punto de guía. Para ello, resulta preciso hallar la relación geométrica entre éste último y los ángulos de deriva de cada rueda δ_i (Dixon, 1.988). En consecuencia, en el modelo de la bicicleta expuesto en la figura 6.9 dicha relación se expresa mediante la igualdad:

$$\delta_{max} = \arctan \left(\frac{l_b}{R} \right) \quad (6.21)$$

Donde R es el radio del círculo de osculación definido por la curvatura actual

El problema fundamental que conlleva realizar en la práctica la limitación expresada en (6.20) consiste en el cálculo de los coeficientes de rigidez de deriva asociados a cada una de las ruedas, que debe realizarse con métodos empíricos. Asimismo, resulta complejo evaluar la validez del modelo por la dependencia de la calidad del piso donde se efectúen las pruebas, y la dificultad en detectar los microdeslizamientos cuando se navega dentro del área de trabajo donde la ecuación (6.17) resulta válida (hasta 0,3g).

Los dos puntos descritos en este subapartado resultan de gran complejidad cuando se intenta traducir en una limitación explícita de la velocidad, debido a la dificultad de construir modelos válidos que reflejen el comportamiento del sistema de dirección y los microdeslizamientos originados por las fuerzas laterales. Sin embargo, el efecto común se cataloga como la desviación del vehículo a partir del camino planificado. Por todo ello, resulta posible unir ambos comportamientos con ayuda de un modelo de representación de la incertidumbre espacial (Smith y Cheeseman, 1.986). De esta forma, la limitación de la velocidad puede representarse mediante unas reglas empíricas que informen acerca de la velocidad máxima según la naturaleza del camino para minimizar la incertidumbre de la posición del vehículo merced a los deslizamientos.

Por otra parte, los efectos de estas restricciones aparecen a velocidades elevadas que no serán alcanzadas por los vehículos en navegación en interiores. En caso contrario, para limitar la velocidad y evitar el peligro de vuelco a causa de las fuerzas laterales, la expresión (6.20) se transforma en:

$$V \sqrt{\frac{a_{Lmax}}{g}} \quad (6.22)$$

Donde a_{Lmax} es la aceleración lateral máxima permitida para que el vehículo no se halle en peligro de vuelco, o bien no provoque excesivos deslizamientos. Esta última expresión se formaliza de forma más simple que su predecesora ya que evita el cálculo de demasiados coeficientes empíricos y relaciona de forma directa la máxima velocidad permitida con la limitación de fuerzas laterales que actúan sobre el vehículo.

6.4.4. Consideraciones operacionales.

Las consideraciones operacionales se introducen en este punto con el fin de realizar la navegación en un entorno donde existan obstáculos y por la necesidad de sincronizarse con otros elementos del mismo.

- i) **Distancia al punto de parada:** Resulta necesario programar la parada del vehículo cuando éste se encuentre próximo al punto final del camino o bien a un obstáculo que le resulta imposible evitar. Sea d_f la distancia actual que separa al robot de un obstáculo o bien del final del camino, y a_b la desaceleración máxima permitida. Se desea que el vehículo alcance una velocidad cero en cierto porcentaje de la distancia d_f , que define una distancia de seguridad (ver figura 6.10).

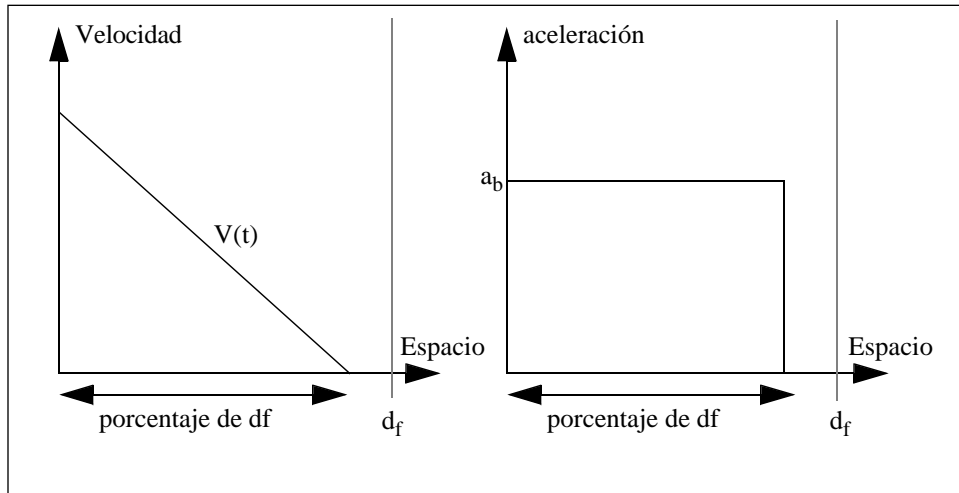


Figura 6.10. Limitación de la velocidad por obstáculo o fin de camino.

Por medio de sucesivos experimentos se demuestra que una zona de seguridad que garantice la seguridad en la parada el vehículo se define por el 20% de d_f . De esta forma, la cota de velocidad resulta:

$$V \leq \sqrt{1,6 d_f a_b} \tag{6.23}$$

Para el caso de parada al final del camino, sin definir una zona de seguridad:

$$V \leq \sqrt{2 d_f a_b} \tag{6.24}$$

ii) **Restricciones de navegación:** Existen limitaciones de velocidad que se definen en su totalidad por las características del entorno de trabajo del vehículo. Así, por razones de seguridad o de sincronización con otros elementos, resulta preciso que el vehículo navegue a cierta velocidad determinada en un tramo concreto de camino. De este modo, esta clase de restricciones se reflejan como funciones definidas a intervalos:

$$V(s) = \begin{cases} V_1 & \text{si } 0 \leq s \leq s_1 \\ \dots & \dots \\ V_N & \text{si } s_{N-1} < s \leq s_N \end{cases} \tag{6.25}$$

La función (6.25) define N segmentos sobre el camino planificado, donde el i -ésimo se encuentra constituido por las posturas del intervalo $(s_{i-1}, s_i]$, y asignado con el valor límite de velocidad V_i .

Un aspecto relevante dentro de las restricciones de navegación consiste en el sorteo de obstáculos móviles cuyo tamaño y trayectoria son conocidos (Kant y Zucker, 1986). La limitación de velocidad utilizada por este esquema, descrito en el segundo capítulo de esta tesis, resulta similar a la empleada en la expresión (6.25), con diferencia de tratarse de una igualdad. Esta rigurosa restricción origina la imposibilidad de trasladarlo a la práctica según el esquema original. El problema surge al suponer que el vehículo se traslada a una velocidad constante y determinada en cada tramo, sin considerar las particularidades de construcción, cinemáticas o dinámicas, ya que la única restricción estimada es la velocidad máxima que desarrolla el vehículo.

Ante la circunstancia de que el vehículo posee cierta dinámica para alcanzar una determinada velocidad de referencia, se hace preciso modificar la ubicación de las zonas prohibidas, que modelan los obstáculos móviles, en el plano de fase espacio-temporal. De esta forma, al igual que en la planificación de una ruta mediante grafos de visibilidad, se debe llevar a cabo un procesamiento previo de las áreas vedadas, antes de elaborar las referencias de velocidad. Ante lo expuesto, con cierta velocidad máxima V_{max} , que garantice las limitaciones de construcción, cinemáticas y dinámicas a lo largo de todo el camino, se define el plano de fase espacio-temporal la recta de menor pendiente admisible. De este modo, ninguno de los segmentos planificados debe presentar una pendiente menor que la especificada por V_{max} . Por otra parte, si el vehículo adquiere una velocidad de referencia V mediante la aceleración a_m , éste emplea un tiempo adicional en alcanzar el espacio final s_f , que en el caso de considerar una velocidad constante a lo largo de todo el segmento, los resultados se muestra en la figura 6.11.a.

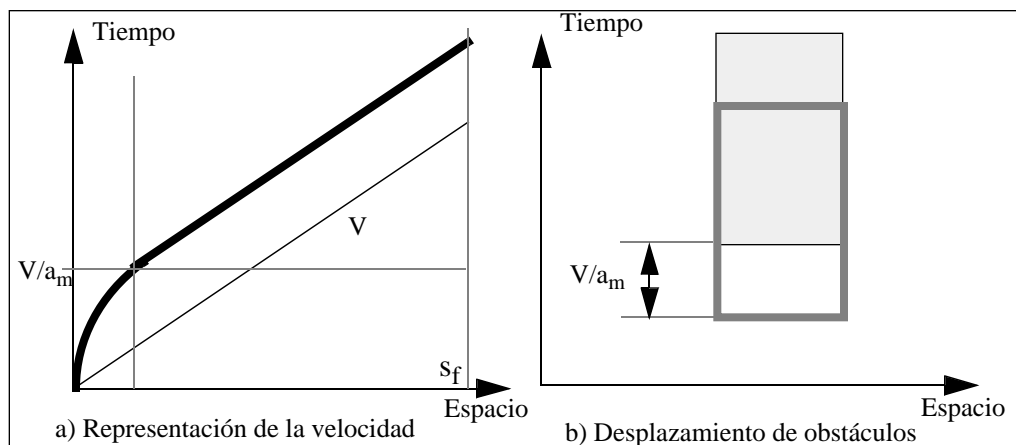


Figura 6.11. Desplazamiento de los obstáculos móviles en el plano espacio-temporal.

En la mencionada figura, la fracción V/a_m representa el tiempo suplementario para alcanzar el espacio final s_f de la curva de velocidad real (trazo grueso) con respecto al segmento de velocidad constante teórico (trazo fino). De este modo, la ubicación de los obstáculos debe sufrir un desplazamiento vertical hacia abajo según la mencionada magnitud. La figura 6.11.b muestra en trazo sólido la representación original del obstáculo en el plano de fase espacio-temporal, mientras que en trazo punteado se refleja la nueva ubicación tras sufrir el traslado.

6.5. Restricciones de orden uno con ligaduras de velocidad y aceleración.

La construcción del perfil de velocidades basado en el problema de las restricciones de orden uno se fundamenta en dos pasos principales:

- División del camino planificado en un conjunto de segmentos.
- Atribución a cada segmento un perfil de velocidad seguro que cumpla las limitaciones de velocidad de cada una de las posturas componentes. Este se construye mediante la metodología expuesta en la expresión (6.5), con la definición de la curva espacio-temporal presentada en (6.6).

El primer punto acepta múltiples soluciones admisibles; desde la división automática del camino mediante el uso de algún criterio, hasta la especificada por el usuario para cumplir ciertos requisitos operacionales. Por ello, esta cuestión no resulta crítica y se precisará en el momento de construir el algoritmo de planificación de velocidades. Sin embargo, el último punto se constituyen en el objetivo de este apartado, ya que delimita la relación que debe existir entre los diferentes parámetros que forman parte de la curva espacio-temporal, para edificar un perfil de velocidades seguro.

Así pues, en este apartado se estudiarán las características que debe reunir la función espacio-temporal, según el problema de las restricciones de orden uno, para garantizar, de este modo, la acotación de la velocidad y la aceleración dentro de un determinado segmento del camino.

6.5.1. Particularización de la curva espacio-temporal

Sea Q la secuencia de posturas libre de obstáculos y admisible de modo cinemático que delimite el camino desde una posición inicial hasta otra final. La división del conjunto Q en segmentos se caracteriza por la siguiente expresión:

$$Q = \{q_1, \dots, q_n\} = \bigcup_{i=1}^m S_i \quad ; \quad (i \neq j) \quad S_i \cap S_j = \emptyset \quad (6.26)$$

Donde S_i representa el i -ésimo segmento del camino compuesto por un subconjunto de posturas de Q . El perfil adecuado de velocidades, para el mencionado segmento, se construye mediante la asignación de las restricciones finales de velocidad, espacio y tiempo definidas por la tupla (v_i, t_i, s_i) . Asimismo, se parte del presupuesto de una velocidad y aceleración acotadas a lo largo de todo el segmento. La dificultad consiste en este momento en la elección de los parámetros que definen la curva espacio temporal expresada en (6.6) para que verifique las restricciones expresadas por la tupla asociada al segmento.

La descomposición reflejada en la expresión (6.26) proporciona la posibilidad de considerar unas condiciones nulas de espacio y tiempo en el inicio de cada segmento. Por otro lado, al considerar el problema de las restricciones de orden uno, se obliga a la continuidad de la aceleración sobre todo el camino, amén de permanecer dentro de ciertos límites. Para cada segmento del camino se define una función cúbica $s_i(t)$ expresada por:

$$s_i(t) = {}^i_0 t^3 + {}^i_1 t^2 + {}^i_2 t + {}^i_3 \quad (6.27)$$

Donde $s_i'(t)$ y $s_i''(t)$ representan las funciones de velocidad y de aceleración respectivamente. Mediante la aplicación de las consideraciones de inicio nulas de espacio y tiempo, la expresión matricial (6.6) se transforma como sigue:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ t_i^3 & t_i^2 & t_i & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3t_i^2 & 2t_i & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} i \\ 0 \\ i \\ 1 \\ i \\ 2 \\ i \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ s_i \\ v_i \\ v_{i+1} \end{bmatrix} \quad (6.28)$$

Donde v_i denota la condición inicial velocidad del segmento, s_i su longitud y t_i el tiempo estimado en recorrerlo. Por último, v_{i+1} representa la velocidad inicial del próximo segmento S_{i+1} y la final del actual. De este modo, se proporciona un perfil de velocidades continuo a lo largo de todo el camino.

Mediante la resolución de la ecuación matricial (6.28), se calculan los coeficientes del polinomio cúbico $v_i(t)$ asociado a S_i :

$$\begin{aligned} v_{i0} &= \frac{(v_i + v_{i+1})t_i - 2s_i}{t_i^3} & v_{i1} &= \frac{3s_i - (2v_i + v_{i+1})t_i}{t_i^2} \\ v_{i2} &= v_i & v_{i3} &= 0 \end{aligned} \quad (6.29)$$

De esta manera, la curva espacio-temporal se define como sigue:

$$v_i(t) = \frac{(v_i + v_{i+1})t_i - 2s_i}{t_i^3}t^3 + \frac{3s_i - (2v_i + v_{i+1})t_i}{t_i^2}t^2 + v_i t \quad (6.30)$$

Por todo ello, la curva espacio temporal asociada al segmento S_i , se define por el conjunto de parámetros $\{v_i, v_{i+1}, s_i, t_i\}$. De ellos sólo se encuentra libre t_i , ya que el resto viene impuesto por la longitud del segmento y las limitaciones de velocidad expuestas en la tupla de las restricciones finales. De esta forma, el problema se transforma en la elección de un valor para t_i que elabore un perfil de velocidades $v_i'(t)$ seguro para el i -ésimo segmento de camino. Las cuestiones planteadas se centran en la existencia de un t_i para cada segmento, de tal modo que, la velocidad y la aceleración se encuentren acotadas con las restricciones impuestas, y que la composición de todas las curvas espacio temporales asignadas a cada segmento adopten una función continua hasta la segunda derivada. En general, las características que debe presentar la curva asociada a un segmento resultan:

- Continua y monótona creciente.
- La primera derivada resulta continua, acotada y no negativa
- La segunda derivada resulta continua y acotada.
- Continuidad en velocidad y aceleración con los segmentos vecinos.

En el estudio realizado a continuación se concluye que el segmento i -ésimo presenta la velocidad y la aceleración acotadas por los intervalos $[0, v_t^i]$ y $[-A_t^i, A_t^i]$. Estos se consideran distintos para cada segmento, al delimitarse a partir de las restricciones de velocidad y la aceleración del vehículo expuestas en el apartado anterior.

6.5.2. Acotación de la aceleración.

La delimitación de la curva espacio-temporal como función cúbica, conlleva la presentación de la aceleración como una rampa con respecto al tiempo. De este modo al determinar que la recta yace en el interior del intervalo $[-{}^iA_t, {}^iA_t]$, se implica el examen de que los valores extremos de la misma en $t=0, t=t_i$ donde se encuentran acotados por los límites establecidos. Por tanto, resulta del todo necesario establecer una relación entre el tiempo t_i , empleado para recorrer el segmento S_i , y el conjunto $\{v_i, v_{i+1}, s_i\}$ que garantice la pertenencia de la recta de aceleración al mencionado intervalo.

La segunda derivada con respecto al tiempo de la expresión (6.30) define la ecuación de la función aceleración:

$${}''_i(t) = 6t \frac{(v_i + v_{i+1})t_i - 2s_i}{t_i^3} + 2 \frac{3s_i - t_i(2v_i + v_{i+1})}{t_i^2} \quad (6.31)$$

Para que en $t=0$ la rampa de aceleración se localiza en el interior del intervalo especificado, se deben cumplir con simultaneidad las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} \frac{6s_i - 2t_i(2v_i + v_{i+1})}{t_i^2} & - {}^iA_t \\ \frac{6s_i - 4t_i(2v_i + v_{i+1})}{t_i^2} & {}^iA_t \end{aligned} \quad (6.32)$$

O expresado de otro modo:

$$\begin{aligned} {}^iA_t t_i^2 + 2(2v_i + v_{i+1})t_i - 6s_i & \geq 0 \\ {}^iA_t t_i^2 - 2(2v_i + v_{i+1})t_i + 6s_i & \leq 0 \end{aligned} \quad (6.33)$$

Estas últimas expresiones definen las desigualdades que deben verificarse para elegir un valor de t_i que garantice la inclusión de la rampa de aceleración en el interior del intervalo de confianza. La primera desigualdad en (6.33) posee de tan sólo una raíz en t_{sI} en la cual t_i es positivo, ya que tanto las velocidades inicial y final, la aceleración y el espacio recorrido resultan de signo positivo. Por tanto, se proporciona la siguiente relación para todo valor positivo de los parámetros de la curva espacio-temporal:

$$\sqrt{(4v_i + 2v_{i+1})^2 + {}^i A_t 24s_i} - 2(2v_i + v_{i+1}) \quad (6.34)$$

La representación en el plano de la desigualdad especificada, se ilustra en la figura 6.12, donde la zona sombreada, delimitada por el intervalo $[t_{s1}, \infty)$, define los valores admisibles para t_i .

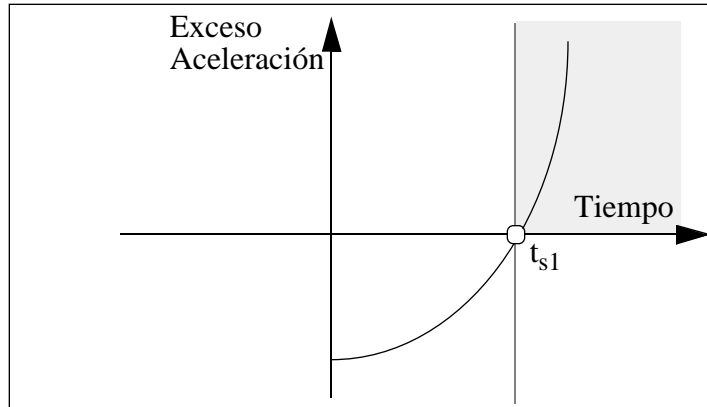


Figura 6.12. Primera restricción de aceleración.

De esta forma, el tiempo empleado en recorrer el segmento deberá ser mayor o igual al señalado en la figura mencionada por t_{s1} .

Por el contrario, la segunda desigualdad expresada en (6.33) puede presentar dos raíces positivas reales iguales o distintas, o bien imaginarias. En la figura 6.13, se refleja mediante una zona sombreada, los valores de t_i que verifican la desigualdad, donde t_{s2} y t_{s3} representan las raíces reales posibles.

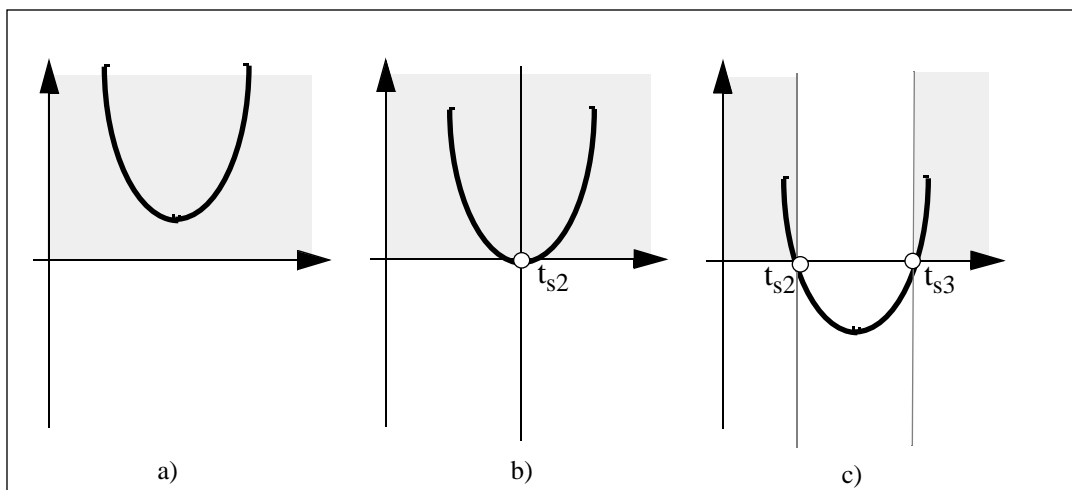


Figura 6.13. Segunda restricción de la aceleración.

La figura 6.13.a muestra la situación en la cual la restricción siempre se verifica, y por tanto se desestima. En este caso la función siempre es positiva y las dos raíces que presenta son imaginarias. En 6.13.b posee dos raíces reales iguales que definen un valor de $t_i=t_{s2}$ en el cual la aceleración inicial se sitúa en su cota mínima. Por último, la figura 6.13.c muestra los intervalos $[0,t_{s2}]$ y $[t_{s3}, \infty)$ que validan la segunda desigualdad expresada en (6.33) y definidos a partir de las raíces reales y distintas, que conforman los valores admisibles para t_i .

La aparición de cada caso descrito en la figura 6.13 depende de la siguiente relación:

$$\frac{(4v_i + 2v_{i+1})^2}{24(A_i)} s_i \quad (6.35)$$

La representación de esta relación en el plano velocidad-espacio divide al mismo en dos regiones. La región inferior indica la existencia de raíces reales distintas, y por tanto, la aparición de un intervalo de tiempos prohibidos para t_i . Por el contrario, la superior denota la presencia de raíces complejas, que provocan la eliminación de la restricción al verificarse para cualquier valor de t_i . La frontera entre ambas regiones señala el valor de aceleración mínima admisible.

La figura 6.14. representa la relación (6.35) mediante la aplicación de una aceleración máxima de $1,2 \text{ m/sg}^2$ y de unas velocidades iniciales nula, uno y dos metros por segundo.

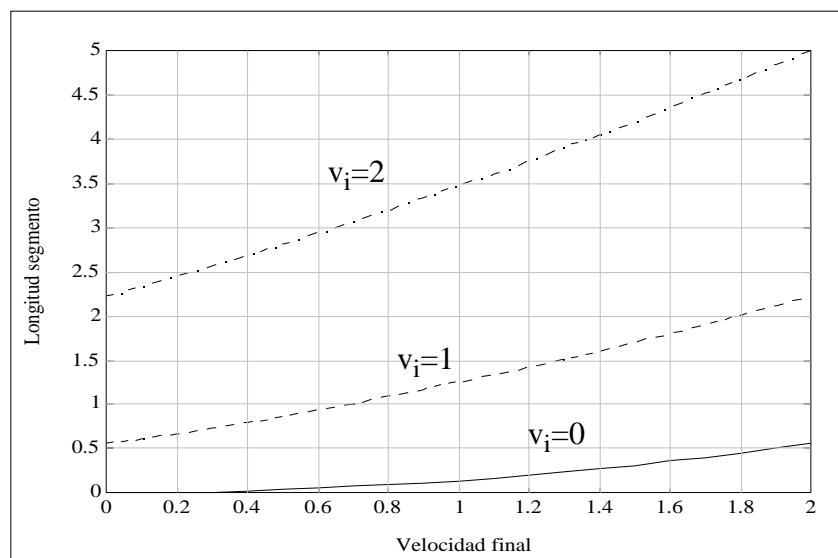


Figura 6.14. Existencia de restricción de aceleración en $t=0$.

De este modo, mediante el cálculo de la raíz t_{s1} , (primera restricción señalada en (6.33)), y de las raíces t_{s2} y t_{s3} , (entendiendo que la segunda restricción de (6.33) encierra soluciones reales), los valores válidos para t_i que no violan la condición de aceleración inicial, se expresan como:

$$t_i \in ([0, t_{s2}] \cup [t_{s3}, \infty) \cup [t_{s1}, \infty) \quad (6.36)$$

Las condiciones finales de la aceleración ($t=t_i$) se construyen mediante la elaboración de un razonamiento análogo al empleado para las condiciones iniciales. En este caso de la expresión (6.31) se desprende la siguiente igualdad para la aceleración final:

$$a_i(t_i) = \frac{t_i(2v_i + 4v_{i+1}) - 6s_i}{t_i^2} \quad (6.37)$$

El estudio de la acotación de la expresión (6.37) exige construir las desigualdades que se señalan a continuación:

$$\begin{aligned} {}^i A_t t_i^2 - (2v_i + 4v_{i+1})t_i + 6s_i &\leq 0 \\ {}^i A_t t_i^2 + (2v_i + 4v_{i+1})t_i - 6s_i &\leq 0 \end{aligned} \quad (6.38)$$

Al igual que con las condiciones de inicio, se define una parábola cuyas raíces especifican los intervalos permitidos para la elección de t_i . De este modo, en la primera de estas ecuaciones, la existencia de raíces reales positivas dependen de la relación:

$$\frac{(2v_i + 4v_{i+1})^2}{24({}^i A_t)} \leq s_i \quad (6.39)$$

Dicha relación define, como en el caso anterior, dos regiones del plano velocidad-espacio que indican la necesidad de aplicación la restricción asociada. De esta manera, en el caso de verificarse la expresión (6.39), se manifiesta la obligatoriedad de la elección del valor de t_i dentro de los intervalos $[0, t_{c1}]$ ó $[t_{c2}, \infty)$. Donde t_{c1} y t_{c2} representan las raíces reales positivas del polinomio definido a partir de la primera inecuación de (6.38). La figura 6.15 representa la mencionada relación mediante la consideración de unas condiciones idénticas a las expresadas en la figura 6.14.

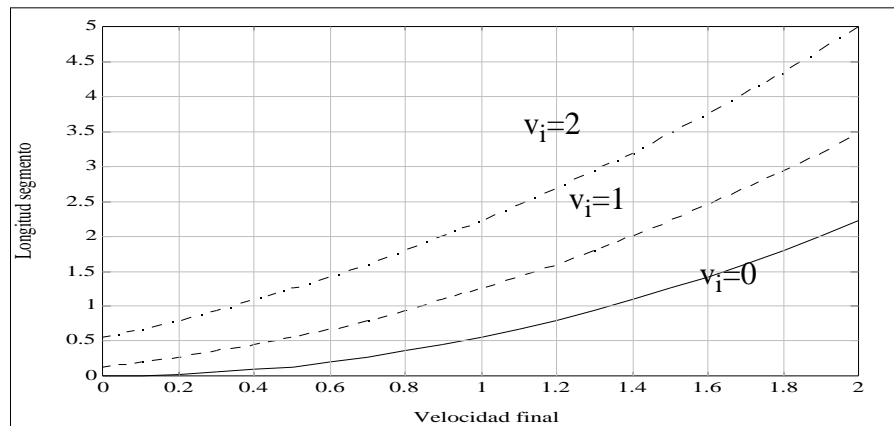


Figura 6.15. Existencia de restricción aceleración en $t=t_i$.

La acotación inferior de la aceleración en $t=t_i$, modelada por la segunda inecuación en (6.38), presenta de manera invariable una sola raíz positiva t_{c3} . Esta define la acotación inferior del tiempo que no debe traspasarse para no exceder la aceleración mínima permitida.

De esta manera, las restricciones de la acotación final de la aceleración definen el siguiente intervalo donde debe realizarse la elección de t_i .

$$t_i \in ([0, t_{c1}] \cup [t_{c2}, 1] \cup [t_{c3}, 1]) \quad (6.40)$$

6.5.3. Acotación de la velocidad.

Una vez realizada la acotación de la aceleración, resulta del todo preciso definir las restricciones adicionales sobre la velocidad para la construcción de una curva espacio temporal adecuada. Como consecuencia, la curva resulta monótona creciente con una acotación de la pendiente máxima. Es decir, se recorrerá un segmento en un único sentido y sin posibilidad de superar cierta velocidad límite. De este modo, se define para cada segmento una acotación de la función velocidad según el intervalo $[0, V_i]$.

La mencionada función viene dada por la primera derivada en el tiempo de la expresión (6.30). Por lo tanto, resulta una parábola con valor inicial v_i y final v_{i+1} . Por todo ello, la acotación exige limitar el punto crítico de la función dentro del intervalo $[0, t_i]$, entendiendo que las velocidades de comienzo y fin resultan admisibles. De este modo, si el máximo o mínimo de la parábola permanece dentro del intervalo $[0, V_i]$, la curva construida resultará válida. Una vez más, para la consecución de este objetivo se ha de elegir un valor correcto para t_i .

El máximo o el mínimo de la función velocidad aparece cuando la aceleración cambia de signo dentro del intervalo definido para recorrer el segmento. De este modo, el valor límite se obtiene cuando la aceleración alcanza el valor nulo. Por ello, el punto crítico se define mediante el valor del parámetro temporal t_0 expresado en la siguiente ecuación:

$$t_0 = \frac{t_i^2(2v_i + v_{i+1}) - 3s_i t_i}{3(v_i + v_{i+1})t_i - 6s_i} \quad (6.41)$$

Como consecuencia, el valor máximo de la función velocidad definido por $v'(t_0)$ debe pertenecer al intervalo $[0, {}^iV_t]$. Este hecho se expresa por las siguientes inecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{c_0 t_i^2 + c_1 t_i - 9s_i^2}{[3(v_i + v_{i+1})t_i - 6s_i]t_i} & \geq 0 \\ \frac{c_2 t_i^2 + c_3 t_i - 9s_i^2}{[3(v_i + v_{i+1})t_i - 6s_i]t_i} & \leq 0 \end{aligned} \quad (6.42)$$

Donde los coeficientes c_i vienen dado por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} c_0 &= 3(v_i + v_{i+1})(v_i - {}^iV_t) - (2v_i + v_{i+1})^2 \\ c_1 &= 6s_i[(2v_i + v_{i+1}) - (v_i - {}^iV_t)] \\ c_2 &= 3(v_i + v_{i+1})v_i - (2v_i + v_{i+1})^2 \\ c_3 &= 6s_i(v_i + v_{i+1}) \end{aligned} \quad (6.43)$$

El estudio de las relaciones presentadas en (6.42) ofrece como resultado la definición de intervalos admisibles para t_i .

6.5.4. Continuidad de la aceleración.

Muchos de los métodos de generación de trayectorias utilizados en robots manipuladores construyen trayectorias en las cuales se desprecia la continuidad de la aceleración. Dichos métodos resultan admisibles en aquellos sistemas capaces de soportar la variación en escalón de la mencionada variable. Sin embargo en robots móviles este tipo de discontinuidad puede ser perjudicial si se originan sacudidas en el sistema de tracción. La consecuencia inmediata de este efecto consiste en la aparición de deslizamientos que incrementan de forma innecesaria la incertidumbre de la posición del robot.

Con la ayuda de polinomios cuánticos la continuidad de la aceleración se realiza de modo explícito al ampliarse la ecuación matricial (6.28) para permitir la asignación de las condiciones iniciales y finales. Esta solución exige imponer unas condiciones adicionales a las relacionadas, debido al incremento del grado del polinomio que actúa como función espacio-temporal. Así, por ejemplo, tanto la función velocidad como la aceleración pueden poseer más de un máximo o mínimo dentro del intervalo de tiempo definido para recorrer el segmento, que han de ser acotados. Por esta razón, la forma menos compleja de verificar los valores de la aceleración y velocidad resulta de la utilización de la curva espacio temporal, para la resolución del problema de orden uno, tal como se ha estado considerando hasta el momento.

De este modo, se requiere que la función aceleración $a(t)$, producto de la composición de todas las aceleraciones $a_i(t)$ ligadas a los distintos segmentos, resulte continua. Dadas dos curvas espacio temporales pertenecientes a dos segmentos consecutivos $a_i(t)$ y $a_{i+1}(t)$, la continuidad de la aceleración se refiere a la verificación de la relación:

$$a_i(t_i) = a_{i+1}(0) \quad (6.44)$$

O bien mediante el uso de las expresiones calculadas en (6.32) y (6.37):

$$\frac{t_i(2v_i + 4v_{i+1}) - 6s_i}{t_i^2} = \frac{6s_{i+1} - 2t_{i+1}(2v_{i+1} + v_{i+2})}{t_{i+1}^2} \quad (6.45)$$

Operando con esta última expresión se obtiene la relación de continuidad entre las aceleraciones de dos segmentos consecutivos:

$$t_{i+1}v_i + 2v_{i+1}(t_{i+1} + t_i) + t_iv_{i+2} = \frac{3(s_it_{i+1}^2 + s_{i+1}t_i^2)}{t_{i+1}t_i} \quad (6.46)$$

A diferencia de las restricciones impuestas en apartados anteriores, esta última expresión no define un intervalo de valores válidos para t_i , sino que impone de modo directo un único valor posible.

6.5.5. Solución a las restricciones de aceleración, velocidad y continuidad.

Las restricciones descritas en los subapartados anteriores exponen un rango de valores posibles para t_i , descritos en forma de intervalos, que garantizan que la curva espacio-temporal asociada al segmento S_i posea ciertas características óptimas. Las restricciones de aceleración impuestas en (6.36) y (6.40) definen un intervalo válido para t_i , que se refleja en la figura 6.16.

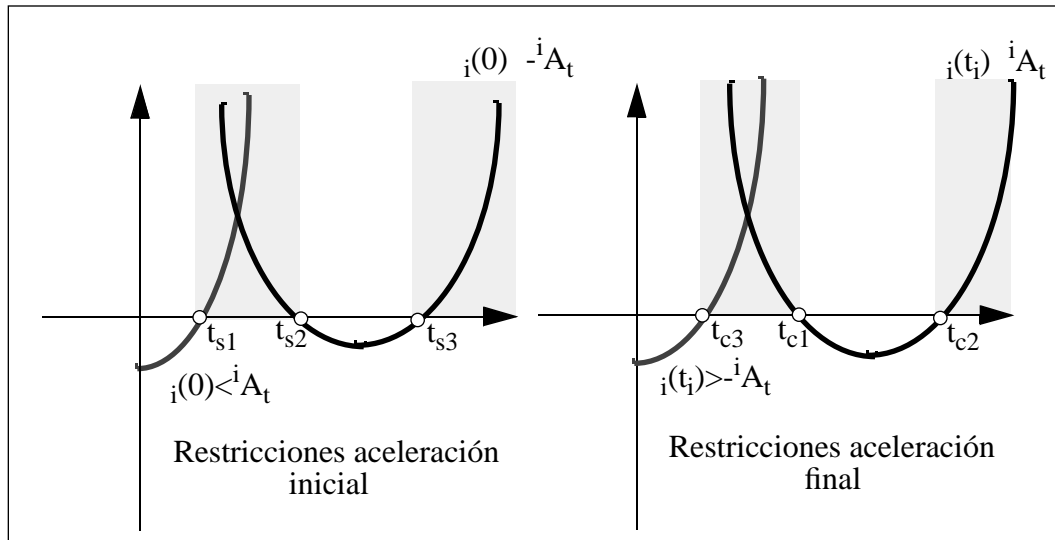


Figura 6.16. Representación de las restricciones de aceleración.

La zona sombreada denota los posibles valores para el parámetro temporal de tal modo que la curva generada presente los límites de aceleración especificados. Si existen las restricciones iniciales de cota inferior (segunda inecuación de (6.33)) y las finales de cota superior (primera inecuación de (6.36)) se verifica la relación de la figura 6.16:

$$t_{s1} < t_{s2} < t_{s3} \quad t_{c3} < t_{c1} < t_{c2} \quad (6.47)$$

Si a las restricciones de la aceleración se añaden las de la velocidad (expresión (6.42)) y la continuidad de la aceleración entre dos segmentos consecutivos (6.46), se define un sistema de inecuaciones no lineales. Los métodos que resuelven este tipo de sistemas suelen presentar una complejidad computacional elevada, y por tanto, no resultan aptos para asegurar la ejecución en tiempo real.

Junto a ello, la elección de las condiciones iniciales y finales de velocidad no debe considerarse un acto sin importancia, ya que depende de los segmentos vecinos. De esta forma, si el segmento S_{i-1} finaliza con máxima velocidad y aceleración positivas, en el segmento actual S_i se violará la restricción de velocidad máxima. Así pues, resulta necesario un método no iterativo que resuelva el sistema de inequaciones planteado, así como el problema de la asignación de las velocidades inicial y final a cada segmento en tiempo real mediante el uso de fórmulas cerradas.

La solución al problema descrito consiste en desacoplar el efecto de la aceleración final de un segmento sobre la velocidad inicial en el siguiente. De esta manera, se asigna a cada segmento un perfil de aceleración que comience y termine con valores nulos. Sean dos funciones cúbicas ${}^1{}_i''(t)$ y ${}^2{}_i''(t)$ cuya composición corresponde a la curva espacio temporal ${}_i(t)$ asignada al segmento i -ésimo. De este modo, las funciones ${}^1{}_i''(t)$ y ${}^2{}_i''(t)$ conforman el perfil de aceleración asociado a un segmento. Por ello, se requiere que además de poseer en sus extremos valores nulos se halle contenido en el intervalo $[-{}^iA_t, {}^iA_t]$, tal como se muestra en la figura 6.17.

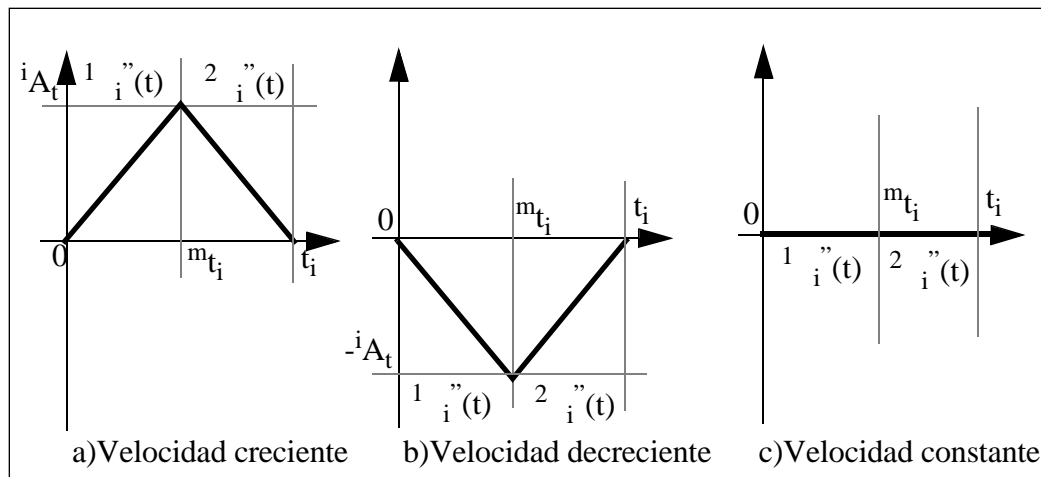


Figura 6.17. Posibles perfiles de aceleración asignados a un segmento.

En los perfiles reflejados en la figura 6.17 se han considerado unas rampas de aceleración de igual magnitud en ambas funciones. Por tanto, a cada una de ellas se aplicará un tiempo ${}^m t_i$ definido como la mitad del tiempo t_i empleado en recorrer el segmento actual. Según este planteamiento, el perfil de velocidad, generado a partir del esquema de aceleración considerado, posee la estructura reflejada en la figura 6.18.

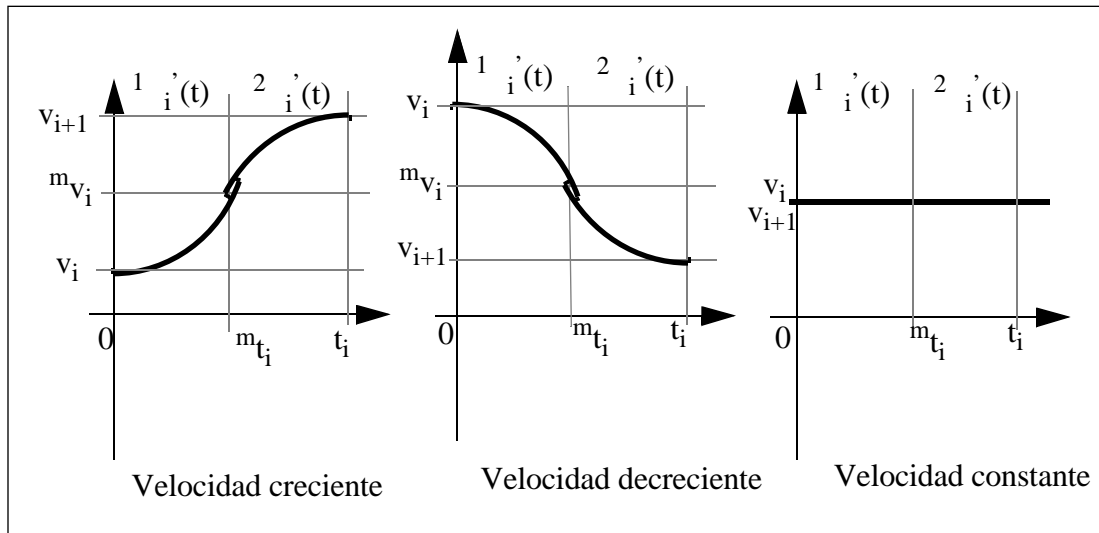


Figura 6.18. Posibles perfiles de velocidad asignados a un segmento.

La curva de velocidad a lo largo del segmento S_i se halla acotada por los valores v_i y v_{i+1} impuestos al comienzo y final del mismo. Por tanto, se evita el uso de las relaciones expresadas en (6.42) para verificar la admisibilidad de la función.

Debido a que ambas funciones ${}^1_i(t)$ y ${}^2_i(t)$ se encuentran definidas en el intervalo $[0, m t_i]$ y poseen segundas derivadas con idénticas pendientes, el valor de velocidad ${}^m v_i$ en ${}^1_i(m t_i)$ y ${}^2_i(0)$ es la media aritmética de las velocidades inicial v_i y final v_{i+1} del segmento actual:

$${}^m v_i = \frac{v_i + v_{i+1}}{2} \quad (6.48)$$

Mediante la aplicación de las condiciones iniciales y finales nulas a las funciones de aceleración (${}^1_i''(0)=0$ y ${}^2_i''(t_i)=0$) se obtiene:

$${}^m t_i = \frac{3({}^1 s_i)}{2v_i + v_{i+1}} \quad t_i - {}^m t_i = \frac{3({}^2 s_i)}{m v_i + 2v_{i+1}} \quad (6.49)$$

Las variables ${}^1 s_i$ y ${}^2 s_i$ denotan la longitud de arco de ${}^1_i(t)$ y ${}^2_i(t)$ respectivamente. Por tanto, la suma de ambas comprende la longitud total del segmento actual:

$${}^1_i({}^m t_i) + {}^2_i(t_i) = {}^1 s_i + {}^2 s_i = s_i \quad (6.50)$$

La combinación de esta última relación con la expresión (6.49) proporciona el valor del espacio recorrido en cada una de las dos subcurvas espacio temporales definidas:

$${}^1s_i = \frac{s_i(5v_i + v_{i+1})}{6(v_i + v_{i+1})} \quad {}^2s_i = s_i - {}^1s_i \quad (6.51)$$

Por último, el tiempo empleado en recorrer la curva espacio temporal, asociada al i -ésimo segmento, es una función de la longitud del mismo y de las condiciones de velocidad inicial y final. El valor del tiempo mitad ${}^m t_i$ se calcula a partir de la condición de continuidad de la aceleración entre las dos curvas. De modo que mediante la sustitución en la expresión (6.46) de los valores de velocidad (6.48) y espacio recorrido (6.51), se obtiene:

$${}^m t_i = \frac{t_i}{2} = \frac{s_i}{v_i + v_{i+1}} \quad (6.52)$$

Con este desarrollo, se logra con facilidad la acotación de la velocidad, así como la continuidad en la función de aceleración. Sin embargo, resulta preciso especificar la relación entre la velocidad inicial y final que asegure la validez de la aceleración empleada.

El máximo valor absoluto de la aceleración depende de las velocidades inicial v_i y final v_{i+1} . Debido a la metodología utilizada, consistente en considerar nula la aceleración en los extremos del segmento, sólo resulta necesario realizar la acotación de la aceleración en el punto de unión de las dos rampas.

En el caso de un incremento positivo de velocidad, el perfil de aceleración asignado al segmento i -ésimo corresponde al mostrado en la figura 6.17a. En este supuesto, la especificación de la relación existente entre las velocidades inicial y final se realiza mediante la restricción de aceleración máxima definida con la primera inecuación de (6.38):

$${}^i A_t ({}^m t_i)^2 - 2(v_i + 2({}^m v_i))({}^m t_i) + 6({}^1 s_i) \geq 0 \quad (6.53)$$

Al sustituir, en la relación anterior, las expresiones de ${}^m v_i$, ${}^1 s_i$ y ${}^m t_i$, se obtiene la siguiente desigualdad:

$$\frac{{}^i A_t s_i + (v_i - v_{i+1})(v_i + v_{i+1})}{(v_i + v_{i+1})^2} \geq 0 \quad (6.54)$$

De este modo, partiendo de un incremento positivo, para no traspasar el límite superior de aceleración, iA_t implica verificar la siguiente relación entre dicho límite, la longitud del segmento y las condiciones inicial y final de velocidad:

$$v_{i+1} = \sqrt{v_i^2 + {}^iA_t s_i} \quad (6.55)$$

De igual forma, en el caso de una disminución de la velocidad, mediante el uso de un desarrollo análogo a la segunda de las inequaciones de la expresión (6.38), se obtiene la siguiente relación:

$$v_{i+1} = \sqrt{v_i^2 - {}^iA_t s_i} \quad (6.56)$$

Dicha relación debe verificarse sólo si existe la raíz del segundo término de la desigualdad.

La solución propuesta en este apartado en relación al problema de las ligaduras asociadas al i -ésimo segmento del camino proporciona un método basado en fórmulas cerradas y de bajo coste computacional. Como compendio del procedimiento descrito para la construcción de la curva espacio-temporal $v_i(t)$ se describe a continuación el siguiente algoritmo.

Construir_sigma(v_i, v_{i+1}, s_i)
Si (v_i, v_{i+1}) pertenecen al intervalo $[0, {}^iV_t]$ entonces
Si $v_i < v_{i+1}$ comprobar relación (6.55) sino verificar relación (6.56).
En caso de comprobación fallida devolver fallo de acotación.
Calcular el valor central del tiempo ${}^m t_i$ mediante (6.52).
Calcular el valor central de velocidad ${}^m v_i$ mediante (6.48).
Calcular los valores ${}^1 s_i$ y ${}^2 s_i$ según la expresión (6.51).
Construir ${}^1 v_i$ con $v_i = v_i; v_{i+1} = {}^m v_i; t_i = {}^m t_i; s_i = {}^1 s_i$ según (6.30).
Construir ${}^2 v_i$ con $v_i = {}^m v_i; v_{i+1} = v_{i+1}; t_i = {}^m t_i; s_i = {}^2 s_i$ según (6.30).
Retornar (${}^1 v_i, {}^2 v_i$).
sino Retornar fallo de acotación.
Fin Construir_sigma.

6.6. Algoritmo de planificación de velocidades.

Este apartado se desarrollará hacia el objetivo de la aplicación de la metodología expuesta para la planificación de velocidades a caminos generados mediante el procedimiento descrito en el quinto capítulo de esta tesis. En primer lugar se realizará la división del camino según unos criterios determinados, para, en segundo lugar, asignarle a cada segmento del mismo un perfil de velocidades admisible basado en curvas espacio-temporal.

De este modo, el procedimiento generador, fundamentado en curvas de tipo - Spline, construye caminos compuestos de segmentos con curvatura aproximadamente constante o variable de forma lineal. Este hecho permite definir cada segmento S_i según la siguiente ley:

$$S_i = \{q_p, q_{p+1}, \dots, q_q\} / (q_j, q_{j+1}) \quad \parallel \quad j - j+1 \parallel \quad E(K, \quad) \quad (6.57)$$

En la expresión anterior un valor nulo de K modela un segmento con curvatura aproximadamente constante. En caso contrario se trata de un segmento que sigue una ley lineal de curvatura. Esta descomposición se puede adaptar a cualquier tipo de camino continuo en curvatura, pero se realiza con un mayor rendimiento sobre los generados según el método propuesto en esta tesis, gracias al empleo del camino de referencias en virtud del cual se construye la curva -Spline. De este modo, en la figura 6.19 se muestra un ejemplo de descomposición en segmentos.

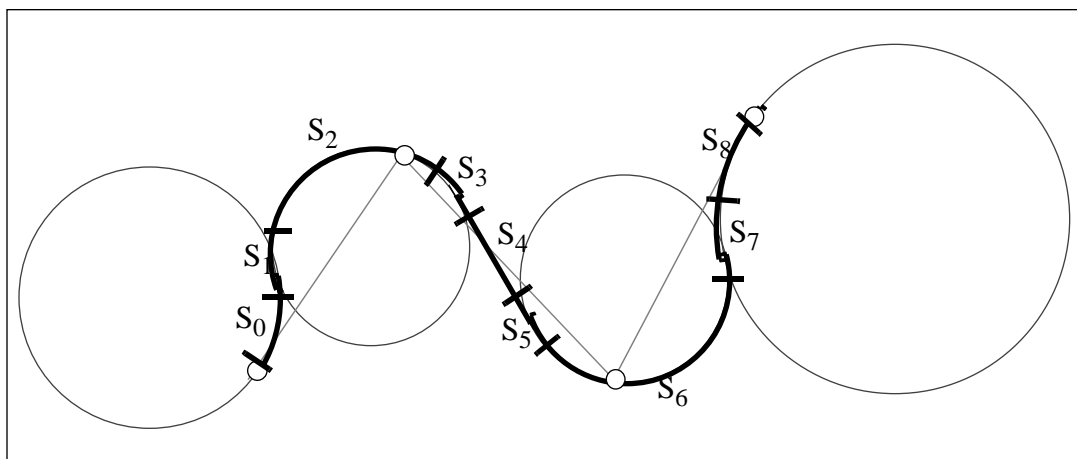


Figura 6.19. Descomposición de un camino en segmentos.

En esta figura aparece en trazo grueso el camino construido a partir de la ruta que se muestra en línea discontinua. Sobre el mismo aparece representada la división en segmentos realizada según la ley (6.57). Los segmentos de curvatura constante corresponden a las porciones de curva -Spline con vértices de control, en su totalidad, sobre los tramos circulares o rectilíneos del camino de referencia. De esta manera, los del segundo tipo se sitúan en las proximidades de los puntos donde éste se muestra discontinuo en curvatura¹. En la figura, los segmentos S_1 , S_3 , S_5 y S_7 poseen una curvatura variable, mientras que el resto la presentan constante.

La asignación de velocidades inicial y final a cada uno de los segmentos que conforman el camino para garantizar la construcción de una curva espacio-temporal admisible, se realiza en dos etapas diferenciadas:

- i) **Identificación de velocidades y aceleraciones máximas:** Las consideraciones cinemáticas y dinámicas se hallan sujetas a la curvatura de la postura actual. Por ello, los valores de las restricciones de velocidad de cada componente de un segmento con curvatura constante poseen magnitudes similares, de tal forma que ésta representa la limitación global de la velocidad del segmento. De igual forma, se construyen las limitaciones globales de aceleración, lo que permite asignar al segmento i -ésimo el par de reducción conjunta $({}^iA_p, {}^iV_l)$ de las mencionadas variables.

Las restricciones de velocidad global $({}^iV_l)$ se utilizan para asignar a cada segmento de curvatura constante las velocidades de inicio y fin (v_i, v_{i+1}) . Sin embargo, sobre los que presentan curvatura variable, solo se especificará la restricción global de aceleración, ya que las condiciones fronteras de velocidad se encuentran definidas por los segmentos colindantes. Finalmente, la velocidad inicial del primer segmento y la final del último se consideran nulas.

- ii) **Verificar la consistencia de las asignaciones de velocidad:** Dos valores de velocidades consecutivos deben verificar las restricciones de la aceleración señaladas por las expresiones (6.55) ó (6.56). En caso de no garantizarse esta circunstancia, la de mayor magnitud se reducirá hasta que asegure la relación correspondiente.

1. Esta propiedad de curvatura de los segmentos de camino, según la situación de los vértices de control que lo definen, se desprende de la revisión a la propiedad de la acotación cartesiana de las curvas -Spline cúbicas realizada en el quinto capítulo de esta tesis.

A partir de un camino Q , dividido en un conjunto de n segmentos, existen $n+1$ condiciones frontera de velocidad:

$$Q = \{S_0, S_1, \dots, S_n\} \quad \{v_0, v_1, \dots, v_n, v_{n+1}\} \quad (6.58)$$

Debido a la alternancia que presentan los segmentos de curvatura constante y variable en los caminos generados mediante el método descrito, el primer paso de asignación de velocidades se describe en el siguiente algoritmo:

```

Calculo_Velocidades(Q)
  Para el índice  $i$  desde 0 hasta  $n$  con incremento de 2 hacer
     ${}^iV_t = \text{Restricción\_global\_velocidad}(S_i)$ 
    Si  $i=0$  entonces
       $v_i = 0$ 
       $v_{i+1} = {}^iV_t$ 
    en caso contrario si  $i=n$ 
       $v_i = {}^iV_t$ 
       $v_{i+1} = 0$ 
    sino
       $v_i = {}^iV_t$ 
       $v_{i+1} = {}^iV_t$ 
    Fin si
  Fin Para
Fin Calculo_Velocidades

```

La segunda etapa de verificación de las velocidades asignadas se realiza mediante este otro algoritmo:

```

Verificar_asignaciones(Q)
  Para el índice  $i$  desde 0 hasta  $n$  hacer
     ${}^iA_t = \text{Restricción\_global\_aceleración}(S_i)$ 
    Si  $v_{i+1} > v_i$  entonces
      Verificar_relación_(6.55)
      Si verificación fallida entonces
         $v_{i+1} = \text{sqr}(\text{sqr}(v_i) + {}^iA_t s_i)$ 
      Fin si
    sino si  $(\text{sqr}(v_i) - {}^iA_t s_i) \geq 0$  entonces
      Verificar_relación_(6.56)
      Si verificación fallida entonces
         $v_i = \text{sqr}(v_{i+1}) + {}^iA_t s_i$ 
      Fin si
    Fin si
  Fin Para
Fin Verificar_asignaciones

```

Por último, la conversión del camino en trayectoria se lleva a cabo por la combinación de las funciones anteriormente especificadas. De esta forma, dado el camino Q , la trayectoria \tilde{Q} se obtiene con el uso del siguiente algoritmo.

```

Conversión_camino(Q)
   $\tilde{Q} = \{ \}$ 
   $\{S\} = \text{Dividir\_camino\_en\_segmentos\_según\_curvatura}$ 
   $\text{Calculo\_Velocidades}(\{S\})$ 
   $\text{Verificar\_Asignaciones}(\{S\})$ 
  Para todo segmento  $S_i$  que compone el camino hacer
     $t_i = \text{Construir\_sigma}(v_i, v_{i+1}, S_i)$ 
     $V(s) = t_i^{-1}(s) / * \text{Curva velocidad según (6.5) } */$ 
     $q_{ini} = q_j \quad S_i / S_i = \{q_j, q_{j+1}, \dots, q_{j+p}\}$ 
    Para cada postura  $q_i$  perteneciente a  $S_i$  hacer
       $d = \text{Longitud de arco desde } q_{ini} \text{ hasta } q_i$ 
       $w = V(d)$ 
       $\tilde{q}_i = (q_i, w)$ 
       $\tilde{Q} = \tilde{Q} \cup \tilde{q}_i$ 
    Fin Para
  Fin Para
  Retornar  $\tilde{Q}$ 
Fin Conversión_camino

```

6.7. Conclusiones.

Este capítulo resuelve el problema de la planificación de velocidades para robots móviles como la última etapa de la planificación de trayectorias. Así, se ha expuesto una metodología que mediante la consideración de las propiedades del vehículo y las características del camino construye un perfil de velocidades adecuado.

Para ello, en primer lugar se ha elegido la curva espacio-temporal como la herramienta adecuada para la construcción de la función velocidad parametrizada con respecto a su longitud de arco. La construcción de esta curva, para que resulte admisible de modo constructivo, cinemático y dinámico, necesita la aplicación en ella de ciertas restricciones que se utilizarán como elementos de definición. Así, se ha caracterizado las limitaciones que presenta un robot móvil para realizar la navegación. Estas limitaciones se utilizan en el algoritmo de construcción del perfil de velocidades.

Este algoritmo soluciona de modo fiable y eficiente el problema de la planificación de velocidades mediante el empleo de curvas splines cúbicas, modificadas según ciertos requerimientos. De esta forma, se garantiza, además de la admisibilidad de la curva de velocidad, la realización de unas transiciones suaves que mejoren la navegación del vehículo. Asimismo, este planteamiento permite su incorporación directa al algoritmo de generación de caminos sin aumentar en exceso la complejidad temporal de este último.

La adaptación para su utilización con restricciones operacionales se realiza de modo sencillo con la sustitución de los primeros pasos del procedimiento *Conversión_Camino*, de división en segmentos y asignación de velocidades, por las especificaciones dadas por el usuario.

Las figuras 6.20 a 6.22 muestran la conversión de un camino en trayectoria, generado aquél mediante el método fundamentado en curvas de tipo -Spline propuesto en el quinto capítulo de esta tesis, y la ejecución efectuada por el robot autónomo móvil RAM-1. Esta última se ha realizado con la aplicación de un método de seguimientos de caminos explícitos basado en una persecución pura, con una distancia de elección del próximo objetivo de 0,3 metros (Martínez, 1.994). De este modo, la primera de ellas refleja el camino planificado en línea continua, mientras que en discontinua aparece el resultado de la ejecución por parte del robot RAM-1. Los círculos sobre el camino denotan la descomposición en segmentos efectuada según la ley (6.57).

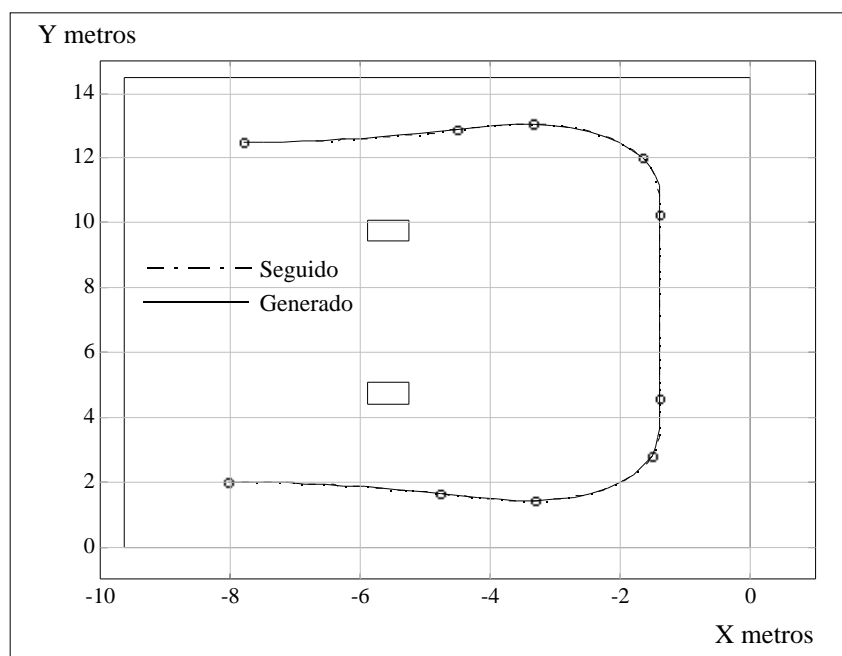


Figura 6.20. Camino del primer experimento y su división en segmentos.

La figura 6.21 muestra los resultados obtenidos de la curvatura (curvatura planificada en línea continua, y en discontinua la seguida) así como la división en segmentos.

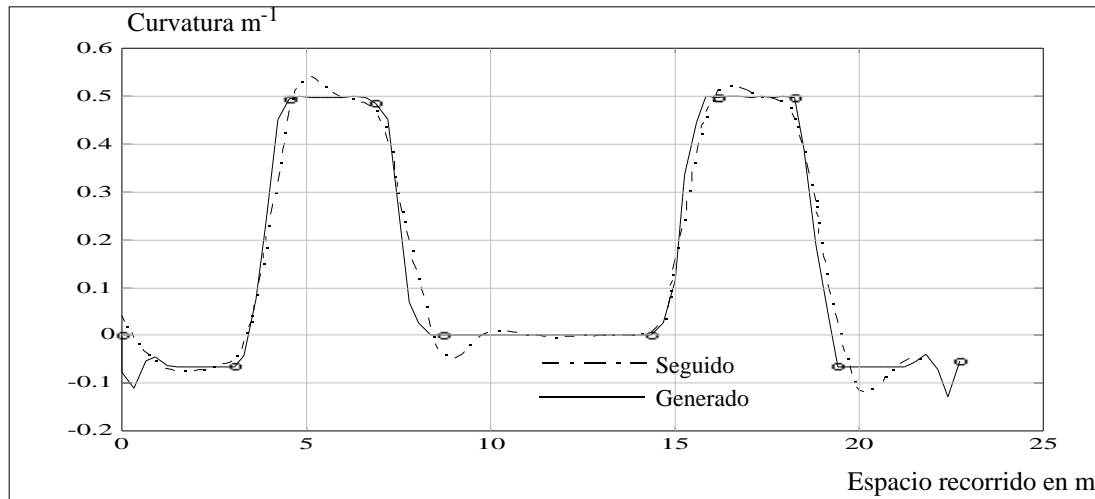


Figura 6.21. Curvatura del camino presentado en la figura 6.20.

La última figura de la serie refleja la conversión en trayectoria del camino generado. El resultado de la asignación y verificación de las velocidades frontera en cada uno de los segmentos pertenecientes al camino se muestra en figura 6.22.a. Esta se ha realizado mediante el cálculo de la velocidad y la aceleración global en cada segmento, según las restricciones expuestas en el apartado 6.4., particularizadas para el robot RAM-1. De esta forma, se han considerado una velocidad y una aceleración máximas de 1.7 m/sg y 1 m/sg² respectivamente. Debido a las prestaciones del vehículo con el que se han realizado los experimentos, las limitaciones más estrictas corresponden a las clasificadas como cinemáticas¹. Así, se observa su influencia sobre la planificación de velocidades al disminuir ésta cuando crece la curvatura.

La segunda fase del proceso de conversión aparece presentado en la figura 6.22.b, en la cual se ilustra en línea continua el perfil de velocidades generado a partir del ajuste basado en curvas espacio-temporales (algoritmo *Conversión_camino*). En discontinua, se refleja la variación de velocidad real a lo largo del camino por parte del robot RAM-1. Se observa cómo ésta sigue de modo fiel a la referencia con cierto adelanto debido a las características anticipativas que posee el algoritmo de seguimiento utilizado.

1. Para un estudio completo sobre las limitaciones de velocidad aplicadas al robot autónomo móvil RAM-1, consultar la referencia (Simón, 1.994).

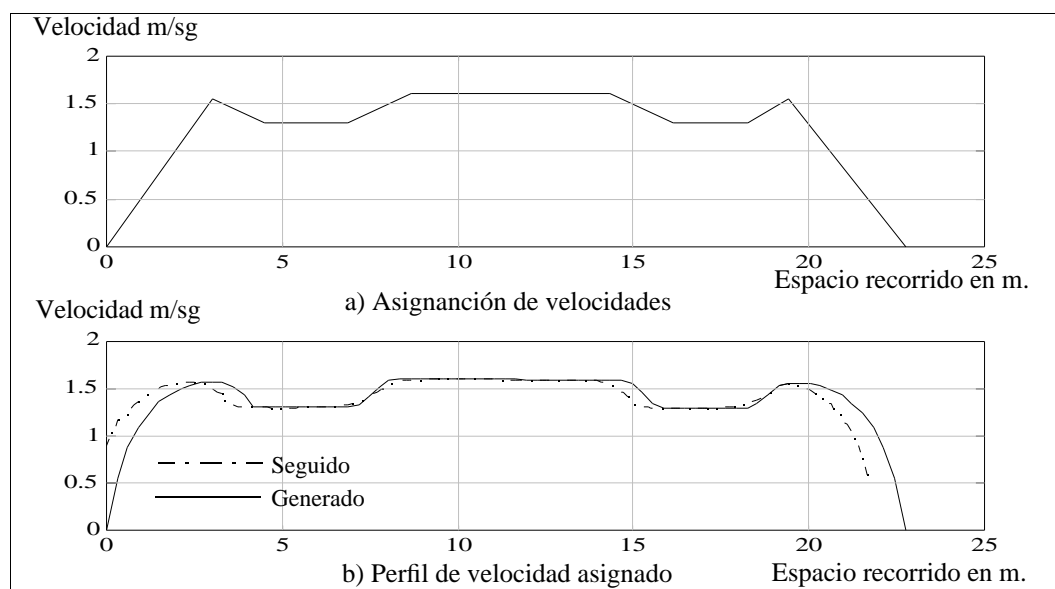


Figura 6.22. Perfil de velocidades asignado al camino de la figura 6.20 y resultado del seguimiento.

Los óptimos resultados del procedimiento se observan al comprobar que los errores cometidos en el seguimiento resultan mínimos (ver la relación entre el camino planificado y el seguido en figura 6.20) pese a las altas velocidades aplicadas durante la navegación.

Las figuras 6.23 a 6.25 muestran un segundo experimento realizado bajo idénticas condiciones al anterior, que vuelve a demostrar la validez del método.

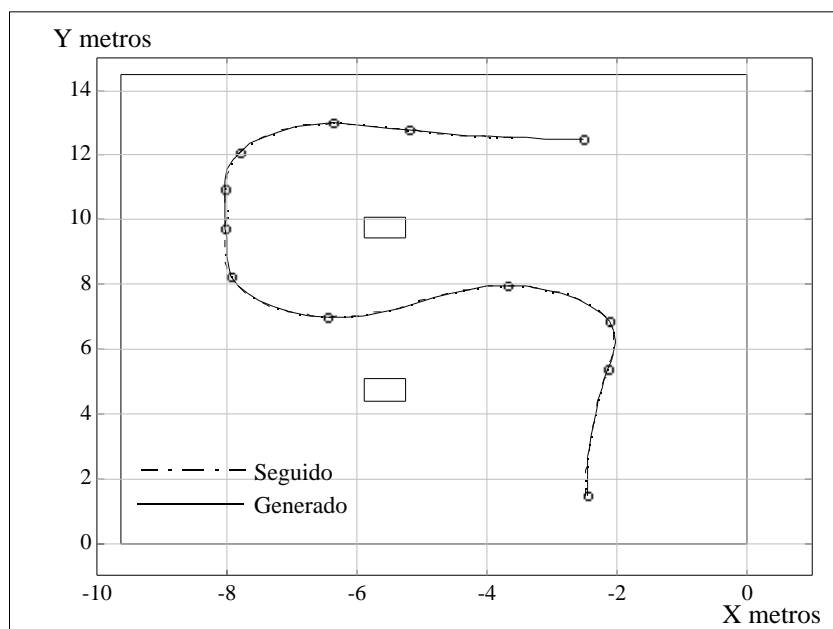


Figura 6.23. Camino del segundo experimento y su división en segmentos.

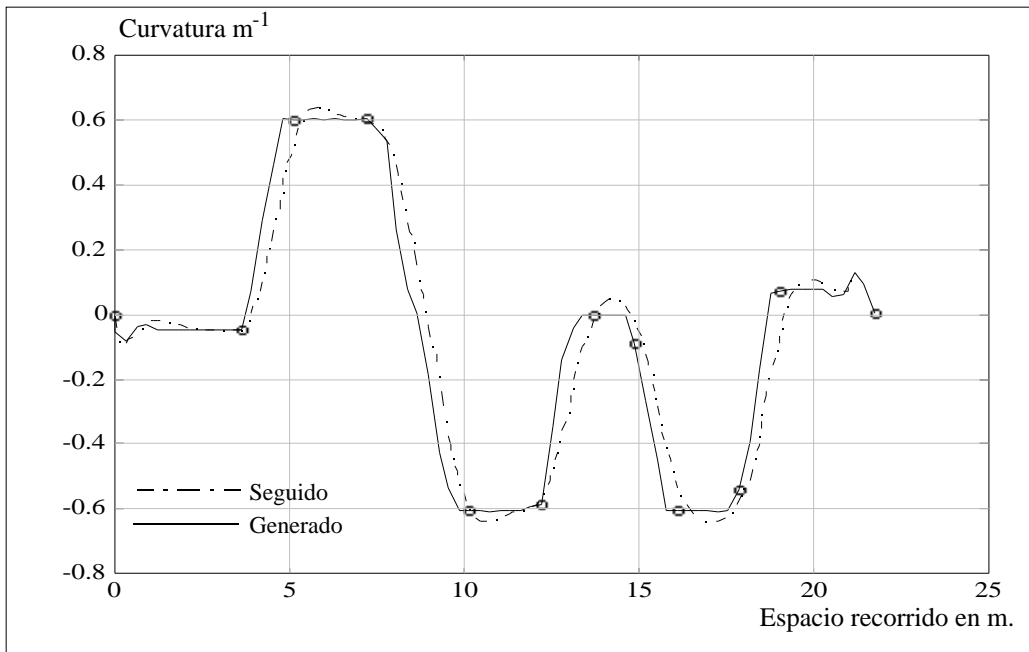


Figura 6.24. Curvatura del camino presentado en la figura 6.23.

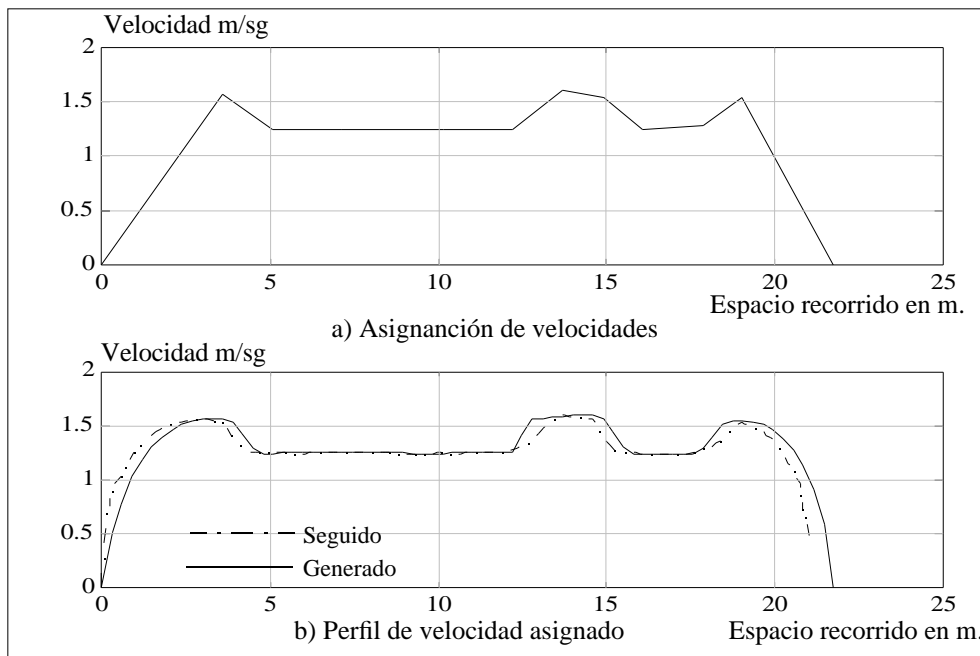


Figura 6.25. Perfil de velocidades asignado al camino de la figura 6.23 y resultado del seguimiento.

El método de planificación de velocidades descrito ha sido implantando en una estación de trabajo SUN SPARC 2 situada a bordo del robot autónomo móvil RAM-1. Las medidas realizadas indican que no se incrementan de modo sensible la generación del camino cuando se añade el procedimiento de su conversión en trayectoria.