APENDICE B.

Geometría Diferencial y curvas Beta-Splines.

B.1. Introducción.

En este apéndice se exponen los conceptos básicos de geometría diferencial utilizados en el desarrollo de la presente tesis. Asimismo, se realiza una breve descripción de las curvas β-splines.

B.2. Representación paramétrica de una curva.

Las curvas paramétricas se caracterizan por la representación funcional de cada una de sus dimensiones. Las coordenadas en un punto de la curva en el plano se expresan mediante el vector:

$$P(\lambda) = [X(\lambda), Y(\lambda)] \tag{B.1}$$

Donde λ es el parámetro, y *X(λ)* e *Y(λ)* las funciones asociadas a cada una de las dimensiones. La ventaja de utilizar la definición (B.1) consiste en de la posibilidad de representar curvas cerradas, que de otro modo se torna imposible. La derivada con respecto al parámetro se precisa del siguiente modo:

$$\frac{d^a}{d\lambda}P(\lambda) = \left[\frac{d^a}{d\lambda}X(\lambda), \frac{d^a}{d\lambda}Y(\lambda)\right] \tag{B.2}$$

De esta forma, la derivada en un punto se denota como:

$$P^{(a)}(\lambda_1) = \frac{d^a}{d\lambda}P(\lambda)\Big|_{\lambda = \lambda_1} \tag{B.3}$$

B.3. Conceptos básicos de la geometría diferencial.

i) **Vector tangente unitario:** Vector normalizado con una dirección y un sentido idénticos al de la primera derivada paramétrica:

$$T(\lambda) = \frac{P'(\lambda)}{|P'(\lambda)|} \tag{B.4}$$

Si la curva se halla definida según su longitud de arco:

$$\frac{dP}{ds} = \frac{P'(\lambda)}{S'(\lambda)} \tag{B.5}$$

Donde *S(λ)* es la función longitud de arco, definida como sigue:

$$S(\lambda) = \int_0^{\lambda} |P'(t)| dt \tag{B.6}$$

Por tanto, se cumple la relación:

$$S'(\lambda) = |P'(\lambda)| \tag{B.7}$$

Según se desprende de la expresión (B.7), la primera derivada de la función longitud de arco con respecto al parámetro λ es el módulo del vector primera derivada de la curva con respecto al mismo parámetro:

$$\frac{dP}{ds} = T(s) \tag{B.8}$$

ii) **Vector normal:** Vector perpendicular a *T(λ)*, y definido de la siguiente forma:

$$N(\lambda) = \frac{T'(\lambda)}{|T'(\lambda)|} \tag{B.9}$$

En el plano, los vectores *T(λ)* y *N(λ)* forman un sistema de coordenadas locales ortonormal en cada punto de la curva.

iii) **Circulo de osculación:** El círculo de osculación en un punto de la curva es el que más aproxima la curva en dicho punto. En el plano formal, se define como aquél cuyas primera y segunda derivadas coinciden con las correspondientes de la curva en dicho punto, y que además yace en el lado cóncavo.

iv) **Vector de curvatura:** El centro y el radio del círculo de osculación se denominan, respectivamente, centro y radio de curvatura. La curvatura $\kappa(\lambda)$ en un punto se define como el recíproco del radio de curvatura. El vector de curvatura $K(\lambda)$,en un punto de la curva, posee el sentido y dirección de $N(\lambda)$, y módulo definido por $\kappa(\lambda)$:

$$K(\lambda) = \kappa(\lambda)N(\lambda) \tag{B.10}$$

El vector curvatura se define como:

$$K(s) = \frac{d^2}{ds}P(s) \tag{B.11}$$

Mediante la aplicación de la expresión (B.5) dos veces consecutivas sobre la ecuación (B.11), se obtiene:

$$K(\lambda) = \frac{S'(\lambda)P''(\lambda) - P'(\lambda)S''(\lambda)}{[S'(\lambda)]^3} \tag{B.12}$$

El valor se $S''(\lambda)$ se alcanza evaluando la derivada de la expresión (B.7):

$$S''(\lambda) = \frac{d}{d\lambda}|P'(\lambda)| = \frac{P'(\lambda)P''(\lambda)}{|P'(\lambda)|} = \frac{P'(\lambda)P''(\lambda)}{S'(\lambda)} \tag{B.13}$$

La combinación de las expresiones (B.12) y (B.13) permite expresar el vector de curvatura de la siguiente manera:

$$K(\lambda) = \frac{P''(\lambda)-T(\lambda)[P''(\lambda)T(\lambda)]}{|S'(\lambda)|^2} \tag{B.14}$$

La curvatura $\kappa(\lambda)$ se define como el módulo de la expresión anterior.

El vector segunda derivada $P''(\lambda)$, en un punto, se halla desplazado cierto ángulo α con respecto al vector normal $T(\lambda)$. De esta forma, en la figura B.1 se muestra la relación trigonométrica existente entre el numerador de la ecuación (B.14) y $P''(\lambda)$.

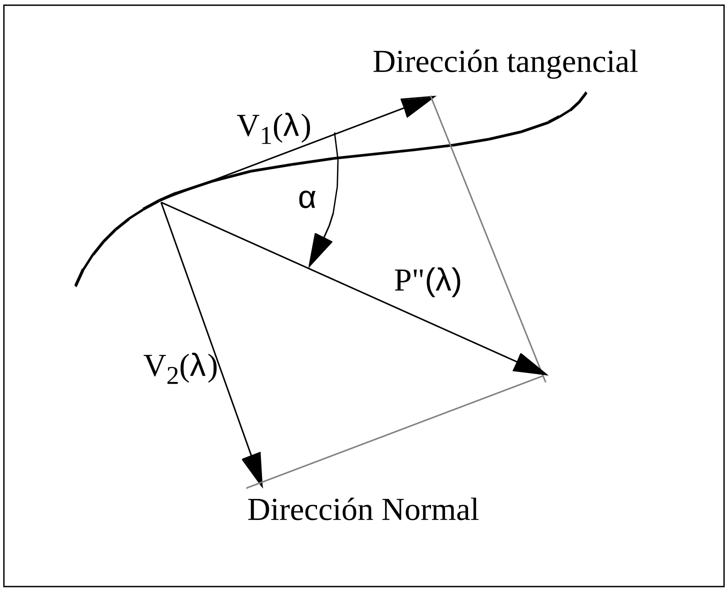

Figura B.1. Interpretación gráfica de los vectores curvatura y segunda derivada.

En la mencionada figura los vectores $V_1(\lambda)$ y $V_2(\lambda)$ se desprenden de la expresión (B.14), y poseen los valores que se describen a continuación:

$$\begin{aligned} V_1(\lambda) &= T(\lambda)[P''(\lambda)T(\lambda)] \\ V_2(\lambda) &= P''(\lambda) - T(\lambda)[P''(\lambda)T(\lambda)] \end{aligned} \tag{B.15}$$

Así, el módulo del numerador de la expresión (B.14), posee la siguiente interpretación geométrica:

$$|P''(\lambda)|seno(\alpha) = |P''(\lambda) - T(\lambda)[P''(\lambda)T(\lambda)]| \tag{B.16}$$

Por tanto, se concluye que el valor de la curvatura en un punto de la curva se expresa como se indica a continuación:

$$\kappa(\lambda) = \frac{|P'(\lambda) \times P''(\lambda)|}{|P'(\lambda)|^3} \tag{B.17}$$

B.4. Método para discretización de curvas paramétricas.

La discretización de una curva denomina el proceso de transformarla en un conjunto de puntos equidistantes resultado de la evaluación iterada de la misma. Esta acción resulta trivial en las curvas parametrizadas por su longitud de arco. Sin embargo, en caso contrario resulta necesario establecer una relación entre el parámetro y la longitud de arco.

Sea λ_1 un valor inicial del parámetro λ, el cálculo de un segundo valor del mencionado parámetro, λ_2, de modo que los puntos de la curva precisados por $P(\lambda_1)$ y $P(\lambda_2)$ se hallen separados por una longitud de arco δ. Ello implica solucionar la siguiente ecuación:

$$\delta - \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left\| \frac{d}{d\lambda} P(\lambda) \right\| d\lambda = 0 \tag{B.18}$$

Donde según la expresión (B.1), se obtiene:

$$\left\| \frac{d}{d\lambda} P_o(\lambda) \right\| = \sqrt{\left(\frac{d}{d\lambda} P_{ox}(\lambda)\right)^2 + \left(\frac{d}{d\lambda} P_{oy}(\lambda)\right)^2} \tag{B.19}$$

Para resolver el término integral de ecuación (B.18) resulta necesario el uso de la técnica de cuadratura de Gauss. La resolución de la ecuación completa implica la utilización un método numérico con el objeto encontrar la raíz-solución de la misma:

$$\lambda_n = \lambda_{n-1} + \frac{\displaystyle\int_{\lambda_1}^{\lambda_{n-1}} \left\| \frac{d}{d\lambda} P_o(\lambda_{n-1}) \right\| d\lambda}{\dfrac{d}{d\lambda} P_o(\lambda_{n-1})} \tag{B.20}$$

Una técnica alternativa, que disminuye el coste computacional, es la subdivisión adaptativa (Gueter y Parent, 1.990). Este método consiste en la construcción de una tabla $TB(\lambda_i, s_i)$, donde λ_i es el parámetro y s_i la longitud de arco recorrida calculada mediante (B.18). El calculo de la longitud de curva s_j, asociada a un valor del parámetro λ_j, consiste en buscar las entradas de la tabla λ_i, λ_{i+1} que se verifican la relación $\lambda_i \leq \lambda_j \leq \lambda_{i+1}$. El valor exacto de s_j se calcula añadiendo a s_i el valor correspondiente del resultado de la interpolación lineal entre los pares (λ_i, s_i) y (λ_{i+1}, s_{i+1}). El empleo del método descrito permite evitar el cálculo del numerador de la expresión (B.20), y por consiguiente disminuir el tiempo de cómputo.

Una solución propuesta para la discretización de la curva, a un coste computacional mínimo, se obtiene de la utilización de un método de bipartición dicotómica. El procedimiento recursivo propuesto a continuación realiza la discretización de una curva $P(\lambda)$ en puntos separados por una distancia aproximada de δ:

Procedimiento DISCRETIZAR($P_o,\lambda_1,\lambda_2,L$)
    $L=\{\}$
    Si DISTANCIA_EUCLIDEA($Po(\lambda_1),Po(\lambda_2)$)$>\delta$ *entonces*
        $\lambda_m=(\lambda_1+\lambda_2)/2;$
        DISCRETIZAR($P_o,\lambda_1,\lambda_m,L_1$);
        DISCRETIZAR($P_o,\lambda_m,\lambda_2,L_2$);
        $L=L_1 \quad L_2;$
    sino
        $L=\{\lambda_1,\lambda_2\};$
    Fin si
Fin DISCRETIZAR

B.5. Las curvas Beta-Splines

Las curvas β-Spline se clasifican dentro de las funciones definidas por secciones cúbicas que garantizan la continuidad en sus uniones hasta la segunda derivada. El segmento i-ésimo de curva se define como:

$$P_i(t) = \sum_{r=-2}^{1} B_r(\beta 1, \beta 2, t) V_{i+r} \qquad 0 \le t \le 1 \tag{B.21}$$

Las funciones peso B_r además de depender del parámetro de la curva t, lo hacen de dos valores adicionales $\beta 1$ y $\beta 2$, denominados parámetros de forma, por afectar la topología de la curva. La continuidad en las uniones entre dos segmentos consecutivos se expresa mediante las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} P_{i+1}(0) &= P_i(1) \\ P'_{i+1}(0) &= \beta 1 P'_i(1) \\ P''_{i+1}(0) &= \beta 1 P''_i(1) + \beta 2 P'_i(1) \end{aligned} \tag{B.22}$$

La especificación de las funciones peso se realiza mediante polinomios cúbicos:

$$B_r(\beta1,\beta2,t) = \sum_{g=0}^{3} c_{gr}(\beta1,\beta2)t^g \qquad 0 \le t \le 1 \qquad r = -2,1,0,1 \qquad \text{(B.23)}$$

Los coeficientes c_{gr} de cada polinomio se calculan con objeto de que los segmentos de la curva β-Spline garanticen en sus uniones las relaciones expresadas en (B.22). Para el cálculo de la curva y la evaluación de un punto de la misma existen algoritmos eficaces (Barsky, 1.988).

La propiedad más importante que posee este tipo de curva, deriva de la posibilidad de acotar el área donde se encuentra ésta con respecto al polígono de control. En otros tipos de curvas splines la acotación resulta más exacta, pero a causa de la flexibilidad de construcción que presentan las β-Splines (los parámetros β1 y β2 pueden tomar múltiples valores), sólo resulta posible asegurar que ésta estará contenida en la zona convexa de su polígono de control (zona sombreada *Hull-Convex* en figura B.2).

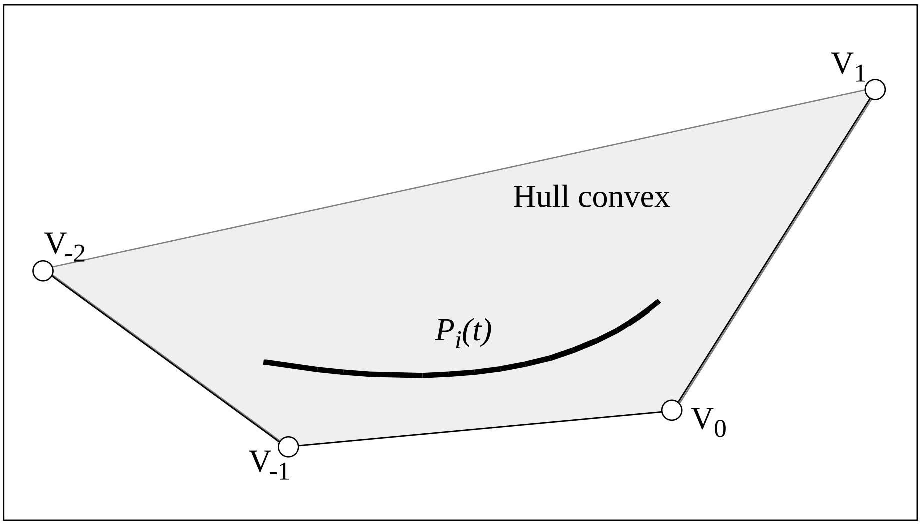

Figura B.2. Curva β-Spline y propiedad “Hull-convex”.