TEORÍA DE ANILLOS. CURSO 08/09
RELACIÓN 4

1.- Supongamos que un anillo R es un orden por la izquierda en un anillo unitario Q. Prueba que si a es un elemento regular de R, entonces el anillo $(aRa, \centerdot)$ es un orden por la izquierda en el anillo $(aQa, \centerdot)$, donde el producto $\centerdot$ queda definido como sigue:

$$ara \centerdot asa = araa^{-1}asa = arasa.$$

2.- Sea Δ' un subanillo de un anillo de división Δ. Demuestra que Δ' es un orden por la izquierda en Δ si y sólo si $\mathcal{M}_n(\Delta')$ es un orden por la izquierda en $\mathcal{M}_n(\Delta)$.

3.- Demuestra que si un anillo R es un orden por la izquierda en un anillo unitario Q, y $\mathcal{U}(Q)$ denota el conjunto de los elementos inversibles de Q :

(i) Si $p \in \mathcal{U}(Q)$ y $Rp \subseteq R$, entonces Rp es un orden por la izquierda en Q.

(ii) Si $q \in \mathcal{U}(Q)$ y $qRqR \subseteq qR$, entonces qR es un orden por la izquierda en Q.

4.- Prueba que un anillo R es un orden en un anillo semisimple artiniano si y sólo si R es semiprimo, no singular por la izquierda y tiene dimensin uniforme por la izquierda finita.

5.- Demuestra que el anillo $R = \{(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \quad | \quad m \equiv n(\text{ mód } 2)\}$ es un orden en el anillo $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

6.- Sea R un anillo no necesariamente unitario que satisface la condición de cadena ascendente para los anuladores por la izquierda y que tiene un elemento regular por la derecha. Prueba que $Z_l(R)$ es un ideal nilpotente de R.

7.- En un anillo unitario todo elemento inversible es regular. Con este problema vemos que el recíproco es cierto en algunos casos. Prueba que si R es un anillo unitario que verifica la condición de cadena descendente para los ideales por la izquierda principales, entonces todo elemento regular es inversible. Como consecuencia, todo anillo artiniano y unitario es un orden en él mismo.

8.- Sean A, B, y C anillos, C unitario, tales que $A \subseteq B \subseteq C$. Demuestra que si A es un orden por la izquierda en C, entonces B es un orden por la izquierda en C.

9.- Sea R un anillo semiprimo de Goldie por la izquierda. Prueba que R tiene dimensin uniforme por la izquierda igual a n para cierto natural n.

10.- Supongamos que R es un subanillo de un anillo unitario regular von Neumann Q. Demuestra que si R tienen dimensión uniforme por la izquierda finita y $R \cap I \neq 0$, cualquiera que sea el ideal por la izquierda no nulo I de R, entonces todo elemento regular por la izquierda de R es inversible en Q.

11.- Sea R un anillo unitario semiprimo de Goldie por la izquierda, subanillo de un anillo unitario Q que coincide con su zócalo. Prueba que si $Rq \cap R \neq 0$ para todo elemento no nulo $q \in Q$, entonces R es un orden clásico por la izquierda en Q.

12.- Consideremos dos anillos unitarios Q y Q', y sea $f : Q \to Q'$ un homomorfismo de anillos. Prueba que si un anillo A es un orden por la izquierda en Q, entonces $f(A)$ es un orden por la izquierda en $f(Q)$.