TEORÍA DE ANILLOS. CURSO 08/09

RELACIÓN 3

1.- Si M es un R-módulo por la izquierda, denotamos por $E(M)$ a la envolvente inyectiva de M.

(i) Pruébese que $M_1 \oplus M_2 \leq_e E(M_1) \oplus E(M_2)$ y dedúzcase que $E(M_1 \oplus M_2) = E(M_1) \oplus E(M_2)$.

(ii) Pruébese que, para cualquier natural n, $E(\oplus_{i=1}^n M_i) = \oplus_{i=1}^n E(M_i)$.

(iii) Si la suma directa no es finita, el resultado anterior no se tiene en general: Sea $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de cuerpos, y llamemos $R = \Pi_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Encuéntrese una familia $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, con I_n ideal de R, tal que $E(\oplus_{n\in\mathbb{N}} I_n) \neq \oplus_{n\in\mathbb{N}} E(I_n)$.

2.- Prueba que un anillo R es noetheriano por la izquierda si y sólo si $E(\oplus M_\alpha) = \oplus E(M_\alpha)$, cualquiera que sea la colección $\{M_\alpha\}$ de R-módulos por la izquierda.

3.- Determina la envolvente inyectiva de $n\mathbb{Z}$.

4.- Prueba que un R-módulo por la izquierda M es noetheriano si y sólo si todo submódulo de M está finitamente generado.

5.- Prueba que si un endomorfismo de un módulo noetheriano (artiniano) es un epimorfismo (monomorfismo), entonces es un isomorfismo.

6.- Sea R un dominio de integridad.

(i) Prueba que si R tiene un ideal por la izquierda minimal, entonces R es un anillo de división.

(ii) Deduce que un dominio artiniano por la izquierda debe ser un anillo de división.

7.- Prueba que en un anillo unitario artiniano por la izquierda, todo ideal por la izquierda nil es nilpotente.

8.- Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo F, T una aplicación lineal de V en V, y sea $F[x]$ el anillo de los polinomios con coeficientes en F en la indeterminada x. Entonces V es un $F[x]$-módulo si definimos:

$$(a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n)v = a_0v + a_1Tv + \ldots + a_nT^nv.$$

(i) Supongamos que V tiene una base numerable $\{v_1, v_2, \ldots\}$, y sea T la transformación lineal tal que $Tv_1 = 0$, $Tv_{i+1} = v_i$ si $i = 2, 3, \ldots$. Prueba que V, como $F[x]$-módulo definido según T, es artiniano.

(ii) Sea T' la aplicación lineal de V tal que $T'v_i = v_{i+1}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$. Prueba que V como $F[x]$-módulo definido según T' es noetheriano.

9.- Sea M un R-módulo por la izquierda que admite una serie de composición, y sea N un submódulo de M. Prueba que existe una serie de composición en la que uno de los términos es N. Deduce de aquí que N y M/N admiten series de composición.

10.- Di si el siguiente enunciado es verdadero o falso, y razona la respuesta: "Un R-módulo por la izquierda M es simplesi y sólo si $M \cong R/I$, cualquiera que sea el ideal por la izquierda maximal I de R."

11.- Sea M un R-módulo por la izquierda que admite una serie de composición, y sea N un submódulo de M. Llamemos **longitud** de M, $l(M)$, al número de factores menos 1 de una serie de composición cualquiera de M.

(i) Prueba que $l(M) = l(N) + l(M/N)$.

(ii) Demuestra que si N' es otro submódulo de M, entonces:

$$l(N + N') = l(N) + l(N') - l(N \cap N').$$

12.- Sea A un álgebra sobre un cuerpo F generada por un elemento nilpotente z. Prueba que A es local.

13.- Sea f un endomorfismo de un R-módulo por la izquierda artiniano y noetheriano M, y supongamos que $M = M_0 \oplus M_1$, donde M_0 y M_1 son submódulos de M invariantes por f ($f(M_i) \subseteq M_i$) tales que $f|_{M_0}$ es nilpotente y $f|_{M_1}$ es un automorfismo. Prueba que $M_0 = f^{-\infty}(0)$ y $M_1 = f^{\infty}(M)$.

14.- Prueba que si R y S son dos anillos locales y $\mathcal{M}_m(R) \cong \mathcal{M}_n(S)$, para ciertos naturales m y n, entonces $m = n$ y $R \cong S$.
Indicación: Usa el Teorema de Krull-Schmidt.

15.- Un anillo R se dice **Dedekind-finito** (finito según Dedekind) si $ab = 1$ implica $ba = 1$ (para $a, b, \in R$). Prueba que si un anillo R es noetheriano como R-módulo por la izquierda, entonces es Dedekind-finito.

16.- ¿Cuáles son los $\mathbb{Z}$-módulos semisimples?

17.- Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo K, y sea $R = End_K(V)$. Prueba que V considerado como R-módulo por la izquierda de la manera natural es simple. ¿Y si sustituimos K por un anillo de división? ¿Y si no suponemos la hipótesis de la dimensión finita?

18.- Con este ejercicio probamos que el recíproco del lema de Schur no es cierto.
Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K, y sea $\{e_1, e_2\}$ una base. Sea
$R' = \{f \in End_K(V) : fe_1 = \alpha e_1, fe_2 = \beta e_1 + \gamma e_2, \quad \alpha, \beta, \gamma \in K\}$.

(i) Prueba que R' es un anillo.

(ii) Prueba que V, considerado (de manera natural) como R'- módulo, no es simple.

(iii) Prueba que el anillo $End_{R'}(V)$ es el cuerpo formado por las multiplicaciones escalares $\lambda_\alpha : x \mapsto \alpha x$.

19.- Demuestra que un módulo semisimple es artiniano si y sólo si es noetheriano.