TEORÍA DE ANILLOS. CURSO 08/09
RELACIÓN 2

1.- Prueba que los $\mathbb{Z}$-módulos por la izquierda $\mathbb{Q}$ y $End_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q})$ son isomorfos.

2.- Supongamos que Q es un R-módulo por la izquierda y que $M = \oplus_{i=1}^{n} M_i$, donde $M_i = Q$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Sea además $S = End_R(Q)$.

(i) Prueba que $End_R(M)$ es isomorfo a $\mathcal{M}_n(S)$.

(ii) Observemos que M puede ser considerado como módulo por la izquierda sobre el anillo $T = \mathcal{M}_n(R)$. Demuestra que $End_T(M)$ es isomorfo a S.

3.- Sea M un R-módulo por la izquierda con base $\mathcal{B}$ de cardinal infinito, llamémosle k. Prueba que si $A \subseteq M$ tiene cardinal $h < k$, entonces existe un submódulo $N \subsetneq M$ tal que $A \subseteq N$ y $M = N \oplus N'$ para cierto submódulo N' de M.

4.- Sea M un R-módulo por la izquierda. Un subconjunto U de M se dice que es **simplemente independiente** si es independiente y Ru es simple para cada $u \in U$. Se dice que es **esencialmente independiente** si es independiente y para cada $u \in U$, Ru es un submódulo esencial de M.

(i) Prueba que todo $R-$módulo por la izquierda contiene un conjunto maximal simplemente independiente.

(ii) Prueba que todo $R-$módulo por la izquierda contiene un conjunto maximal esencialmente independiente.

(iii) Encuentra un subconjunto esencialmente indepediente de $\mathbb{Z}_6$ (como $\mathbb{Z}$-módulo) que lo genere. ¿Es este conjunto simplemente independiente?

(iv) Encuentra un subconjunto independiente de $\mathbb{Z}_6$ que no sea esencialmente independiente. ¿Es este conjunto una base?

5.- Da un ejemplo de un R-R-bimódulo M tal que ${}_RM$ sea simple y M_R no.

6.- Sea D un dominio de integridad que no sea cuerpo, y sea F su cuerpo de fracciones. Prueba que F no es libre como D-módulo.

7.- ¿Es libre el cociente de un módulo libre por un submódulo? ?Y si el submódulo es libre?

8.- (**Lema de Schanuel**). Supongamos que tenemos dos sucesiones exactas cortas de R-módulos y R-homomorfismos: $0 \to N_i \to P_i \to M \to 0$ y que P_i es proyectivo ($i = 1, 2$). Prueba que $P_1 \oplus N_2 \cong P_2 \oplus N_2$.

9.- Sea M un R-módulo por la izquierda simple. Diremos que M es **singular** si todo ideal por la izquierda maximal I de R tal que $M \cong R/I$ es un ideal por la izquierda esencial de R.

(i) Prueba que si M es un R-módulo por la izquierda simple no singular, entonces M es proyectivo.

(ii) Prueba que si M es un R-módulo por la izquierda proyectivo, entonces M es no singular.

10.- Responde a las siguientes cuestiones:

(i) ¿Es proyectivo todo submódulo de un módulo proyectivo?

(ii) ¿Es proyectivo el cociente de un módulo proyectivo por un submódulo?

11.- Sea R un anillo unitario.

(i) Prueba que si M es un R-módulo por la izquierda inyectivo, toda sucesión exacta corta de R-módulos por la izquierda $0 \to M \to M' \to M'' \to 0$ es escindida.

Sean M y M' dos R-módulos por la izquierda. Un monomorfismo $f : M \to M'$ se dice que es **esencial** si $f(M)$ es un submódulo esencial de M' ($f(M) \cap N' \neq 0$ para cualquier submódulo no nulo N' de M').

(ii) Prueba que si M es un módulo inyectivo, todo monomorfismo esencial con dominio M es un isomorfismo.

12.- Responde a las siguientes cuestiones:

(i) ¿Es inyectivo todo submódulo de un módulo inyectivo?
(ii) ¿Es inyectivo cualquier cociente de un módulo inyectivo por un submódulo?
(iii) Y el coproducto arbitrario de módulos inyectivos, ¿es inyectivo?

13.- (Este problema da una caracterización de los anillos semisimples.) Prueba que para un anillo R las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) Todo R-módulo por la izquierda es proyectivo.
(ii) Toda sucesión exacta corta de R-módulos y R-homomorfismos es escindida.
(iii) Todo R-módulo por la izquierda es inyectivo.

14- Un grupo abeliano G es divisible si, cualesquiera que sean los elementos $a \in G$ y $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $m|a$, esto es, existe $b \in G$ tal que $a = mb$.

(i) Prueba que las sumas directas, las imágenes homomórficas y los sumandos directos de grupos divisibles son divisibles.
(ii) Prueba que un grupo abeliano G es divisible si y sólo si es inyectivo como $\mathbb{Z}$-módulo.

14-

(i) Prueba que los grupos aditivos $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ son divisibles.
(ii) Prueba que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ y que los cocientes directos de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, por ejemplo los p-subgrupos de torsión $\mathbb{Z}_{p^\infty} = \{r \in \mathbb{Q} \mid p^n r \in \mathbb{Z} \text{ para algún } n\}/\mathbb{Z}$, son divisibles.
(ii) Prueba que ningún grupo abeliano finito es divisible, y que ningún grupo abeliano libre es divisible.

15- Un submódulo N de un R-módulo por la izquierda M se dice **submódulo cerrado** de M si N no tiene extensiones esenciales propias dentro de M.

(i) Da un ejemplo de un submódulo cerrado y de otro que no lo sea.
(ii) Prueba que un submódulo cerrado de un módulo inyectivo es inyectivo.