TEORA DE ANILLOS. CURSO 08/09

RELACIÓN 1

1.- Sea M un R-módulo por la izquierda. Prueba que cualesquiera que sean los elementos $r \in R, x \in M$, se tiene:

(i) $r0_M = 0_M$.
(ii) $0_R x = 0_M$.
(iii) $r(-x) = (-r)x = -(rx)$.

2.- Sea S un subanillo de un anillo R. Prueba que todo R-módulo por la izquierda es también un S-módulo por la izquierda. Da un ejemplo de un subanillo S de un anillo R y de un grupo abeliano aditivo M que sea S- módulo pero no R-módulo.

3.- Sea M un grupo abeliano y n un número natural tal que $nx = 0$ para todo $x \in M$. ¿Se puede dotar a M de manera natural de estructura de $\mathbb{Z}_n$-módulo?

4.- Sea M un R-módulo.

(i) Prueba que la intersección de un número arbitrario de submódulos de M es un submódulo de M.
(ii) Prueba que la suma de un número arbitrario de submódulos de M es un submódulo de M.
(iii) ¿Es la unión de submódulos un submódulo?

5.- Sean: M un R-módulo por la izquierda y X un subconjunto de M; denotemos por $< X >$ al sumódulo de M generado por X. Demuestra que se verifica:

$$< X >= \{\sum_{i=1}^{n} r_i x_i : r_i \in R, x_i \in X, n \in \mathbb{N}\} = \bigcap_{i \in \mathcal{I}} N_i,$$

donde $= \{N_i : i \in \mathcal{I}\}$ es el conjunto de los submódulos de M que contienen a X.

6.- Sea M un R-módulo por la izquierda arbitrario, y N un submódulo de M. Prueba que S es un submódulo de M/N si y sólo si existe P, un submódulo de M que contiene a N, tal que $S = P/N$.

7.- Consideremos un R-módulo por la izquierda M.

(i) Prueba que $(End_R(M), +, o)$ es un anillo. Llamémosle S.
(ii) Prueba que M es un (R, S^{op})-bimódulo.
(iii) Si T es otro anillo y M es un (R, T)-bimódulo, demuestra que $Hom_R(R, M)$ es un T-módulo por la derecha isomorfo a M.

8.- Sea Λ un conjunto de índices, y sea Γ un subconjunto no vacío de Λ. Sea $\{M_i\}_{i\in\Lambda}$ una familia de R-módulos por la izquierda. ¿Puede identificarse $\prod_{i\in\Lambda} M_i$ con un submódulo de $\prod_{i\in\Lambda} M_i$?

9.- ¿Son los submódulos de un producto directo producto directo de submódulos?

10.- Prueba que si A y B son dos submódulos de un R-módulo por la izquierda M tales que $M = A \oplus B$, entonces $M/A \cong B$.

11.- Sea C un R-módulo por la izquierda, y sean A y B submódulos de C tales que $A \subseteq B \subseteq C$. Supongamos que A' es otro submódulo de C que satisface: $C = A \oplus A'$. Prueba que $B = A \oplus (B \cap A')$.

12.- Sea $\{M_i : i \in \Gamma\}$ una familia de submódulos de un R-módulo por la izquierda M. Prueba que el submódulo $\sum_{i \in \Gamma} M_i$ es precisamente el submódulo generado por $\cup_{i \in \Gamma} M_i$.

13.- Prueba que un R-módulo por la izquierda M está finitamente generado si y sólo si para cada familia $\{M_i : i \in \Gamma\}$ de submódulos de M tal que $M = \sum_{i \in \Gamma} M_i$, existe un subconjunto finito Λ de Γ tal que $M = \sum_{i \in \Lambda} M_i$.

14.- Sea M un R-módulo por la izquierda, y sea $\{M_i : i \in \Gamma\}$ una familia de submódulos de M que satisface la siguiente condición: $0 = \sum_{i \in \Gamma} a_i$ para cierto subconjunto finito Λ de Γ y ciertos elementos $a_i \in M_i$ sólo cuando $a_i = 0$ para todo $i \in \Lambda$. Prueba que el submódulo N de M generado por $\cup_{i \in \Gamma} M_i$ satisface: $N = \oplus_{i \in \Gamma} M_i$.

15.- Sea $\mathbb{Q}$ el cuerpo de los racionales y $\mathbb{Q}_p$ el subanillo de $\mathbb{Q}$ formado por aquellos racionales cuyos denominadores son potencias del primo p. Prueba que el $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es la suma directa de los $\mathbb{Z}$-módulos $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}$.

16.- Los anillos que se construyen en este ejercicio reciben el nombre de **anillos triangulares**. Sean R y S dos anillos, y sea M un (R, S)-bimódulo. Consideremos el conjunto

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} r & a \\ 0 & s \end{pmatrix} : r \in R, a \in M, s \in S \right\}.$$

Definimos suma y multiplicación en T de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} r & a \\ 0 & s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r' & a' \\ 0 & s' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r + r' & a + a' \\ 0 & s + s' \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} r & a \\ 0 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r' & a' \\ 0 & s' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rr' & ra' + as' \\ 0 & ss' \end{pmatrix}.$$

(i) Prueba que, con las operaciones definidas, T es un anillo.

(ii) Prueba que $H = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a \in M \right\}$ es un ideal de T (que podemos identificar con M) de cuadrado cero.

(iii) Demuestra que $R \times S$ es isomorfo a un subanillo de T.

(iv) Demuestra que todo ideal por la izquierda de T tiene la forma

$$\left\{ \begin{pmatrix} r & a \\ 0 & s \end{pmatrix} : (r, a) \in X, s \in Y \right\},$$

donde X es un submódulo del R-módulo $R \times M$ (considerado como conjunto de pares ordenados), e Y es un ideal por la izquierda de S que satisface $\{0\} \times MY \subseteq X$.