Lecciones de Equilibrio General Computable con MatLab

Gonzalo Fernández de Córdoba Martos

Esta versión: 28 de julio de 2002

1 Lección séptima

En esta última lección vamos a estudiar de nuevo el modelo simple de crecimiento pero con una pequeña variante. Vamos a introducir pertubaciones estocásticas sobre el parámetro de productividad agregada en la función de producción. La técnica que vamos a emplear para resolver el problema es la de las Expectativas Parametrizadas de Albert Marcet. Esta técnica, a diferencia de otras como la loglinearización en torno al estado estacionario utilizada por King, Plosser y Rebelo o la de programación dinámica permite realizar el cáculo de toda la trayectoria óptima a lo largo del proceso de acumulación de capital. Por esta razón comenzamos con ella.

1.0.1 El entorno

Las preferencias

Vamos a considerar que hay un número muy grande de consumidores y que se dan las propiedades para poder agregarlos en un único agente representativo. Este agente representativo tiene como función de utilidad

$$U = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

donde c_t es el consumo realizado en el momento t y $\beta \in (0,1)$ es el factor de descuento intertemporal de utilidad. Para este ejemplo definiremos

$$u(c_t) = log(c_t)$$

Las tecnologías

La tecnología agregada del producto interior del país la representaremos como una Coob-Douglas puesto que por un lado así lo recomiendan los datos, y por otro las propiedades de esta tecnología son compatibles con nuestra teoría de la empresa. Así, el producto total se escribe como:

$$y_t = A_t k_t^{\alpha} l_t^{1-\alpha},$$

donde k_t es el stock de capital en el momento t. El parámetro $\{A_t\}_{t=0}^{\infty}$ sigue un proceso estocástico con la siguiente estructura:

$$A_t = \overline{A} e^{\phi_t} \tag{1}$$

$$\phi_t = \varphi \phi_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varphi < 1, \quad \text{y} \quad \varepsilon_t \sim N\left(0, \sigma^2\right). \tag{2}$$

el parámetro $\overline{A}$ es la media del proceso que sigue el parámetro de productividad agregada, en tanto que ϕ_t sigue un proceso autorregresivo de orden 1 con parámetro φ. La pertubación estocástica que sigue el proceso autorregresivo ε_t, es normal con esperanza 0, y varianza σ^2.

Las dotaciones

En cada periodo la economía posee una unidad de trabajo $l_t = 1$ y al inicio del periodo $t = 0$, hay k_0 unidades de capital.

Información

Hay incertidumbre en el proceso productivo. En el momento de iniciarse el proceso productivo el agente representativo tiene que decidir cuanta inversión debe incorporar al stock de capital para iniciar el proceso productivo, sin embargo, en el momento de tomar la decisión el agente representativo no sabe cuál será el valor de A_{t+1}. Toda la información se conoce con certeza hasta el periodo t.

El problema del agente representativo se formaliza:

$$\underset{\{c_t,k_t\}_{t=0}^{\infty}}{Max} \quad E_t\left\{\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t \log(c_t)\right\} \tag{3}$$

sujeto a las siguientes restricciones:
La primera es la ley de acumulación de capital

$$k_{t+1} = I_t + (1-\delta)k_t \tag{4}$$

La segunda es la condición de factibilidad, según la cual lo consumido y lo invertido en un periodo no puede exceder a la capacidad productiva en ese periodo.

$$c_t + I_t = A_t k_t^{\alpha} l_t^{1-\alpha}$$

La tercera es el proceso estocástico que sigue el parámetro de productividad agregada.

$$A_t = \overline{A}e^{\phi_t} \tag{5}$$

$$\phi_t = \varphi\phi_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varphi < 1, \quad and \quad \varepsilon_t \sim N\left(0, \sigma^2\right). \tag{6}$$

La cuarta nos da las dotaciones iniciales.

$$k_0 \text{ dado y } l_t = 1, \forall t$$

Haciendo algunas sustituciones obvias para simplificar el problema obtenemos:

$$\underset{\{c_t,k_t\}_{t=0}^{\infty}}{Max} \quad E_t\left\{\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t \log(c_t)\right\}$$

$$\begin{aligned} s.a.\ c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t &= A_t k_t^{\alpha} \\ A_t &= \overline{A}e^{\phi_t} \\ \varphi\phi_{t-1} + \varepsilon_t &= \phi_t \\ k_0 \text{ dado y } l_t &= 1, \forall t \end{aligned}$$

Despejando c_t de la primera restricción y sustituyéndolo en la función objetivo encontramos un problema de maximización sin restricciones, del cual es muy fácil obtener la ecuación de Euler como:

$$1/c_t = \beta E_t\left\{1/c_{t+1}\left[\alpha A_{t+1}k_{t+1}^{\alpha-1} + (1-\delta)\right]\right\} \tag{7}$$

El operador de esperanzas opera desde el momento $t+1$ en adelante, ya que toda la información hasta el momento t es conocida. El probelma que tenemos con la ecuación de Euler en que no sabemos cómo se distribuye el término sobre el que opera el operador de esperanzas, y por tanto no podemos calcularlo. La idea de la parametrización de las expectativas consiste en aproximar el lado derecho de la ecuación de Euler a un polinomio que solo dependa del valor de variables de estado contemporaneas. La forma funcional del polinomio debería asemejarse a la forma funcional que queremos aproximar, por tanto un posible candidato podría ser:

$$E\left\{1/c_{t+1}\left[\alpha A_{t+1}k_{t+1}^{\alpha-1} + (1-\delta)\right]\right\} \sim e^{\alpha_0}A_t^{\alpha_1}k_t^{\alpha_2}. \tag{8}$$

Una vez que tenemos un candidato deberemos proceder de acuerdo con el siguiente programa:

1. Generamos una secuencia completa hasta T, $\{A_t\}_{t=0}^{T}$.
2. Conjeturamos un vector de parámetros $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$.
3. Con la aproximación

$$1/c_t = \beta e^{\alpha_0}A_t^{\alpha_1}k_t^{\alpha_2}. \tag{9}$$

y

$$k_{t+1} - (1-\delta)k_t + c_t = A_t k_t^{\alpha}, \tag{10}$$

y el valor conocido de k_0 podemos generar las series $\{c_t\}_{t=0}^{T}$, y $\{k_t\}_{t=0}^{T}$. El procedimiento es simple:con k_0 y A_0, podemos obtener c_0 de la ecuación 9, y después obtener el valor de k_1 de la ecuación 10. Ahora, con los valores de A_1 y k_1 podemos computar c_1,y luego k_2, y así sucesivamente.

4. Calculamos $\{y_t\}_{t=0}^{T}$ como

$$y_t = 1/c_{t+1}\left[\alpha A_{t+1}k_{t+1}^{\alpha-1} + (1-\delta)\right]$$

y regresamos

$$\log y_t = \alpha_0 + \alpha_1 \log A_t + \alpha_2 \log k_t$$

para encontrar un nuevo vector $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$.

5. Si el nuevo vector de parametros MCO fuera sustancialmente diferente del vector propuesto como semilla entonces iteramos volviendo al paso 2, en caso contrario detenmos el proceso de iteración.

Un programa de MatLab que hace este proceso es el siguiente:

```
clear
%Valor de los parámetros
delta=0.1;
var=0.1;
prodconst=20;
betar=0.901;
alpha=0.3;
psi=0.7;
T=100;
phi(1)=0;
maxit=1000;
%La ecuación de Euler es:
%U'(Ct)=betar*E{U'(Ct+1)[alpha*At+1*kapt+1^(alpha-1)+(1-
delta)
%Polinomio de ajuste: exp(alpha0)*At^alpha1*kapt^alpha2
%Generamos una secuencia de longitud T
for i=1:T
epsilon(i)=randn;
phi(i+1)=psi*phi(i)+epsilon(i)*var;
aletpc(i)=prodconst*exp(phi(i));
```

```
end
%Estado estacionario
constant1=1-betar*(1-delta);
constant2=betar*alpha*prodconst;
kapss=(constant1/constant2)^(1/(alpha-1));
css=prodconst*kapss^alpha-delta*kapss;
kap(1)=kapss
%Semilla inicial para los parámetros del polinomio
alpha0(1)=log(1/css*(alpha*prodconst*kapss^(alpha-1)+(1-delta)));
alpha1(1)=0.1;
alpha2(1)=0.1;
for l=1:maxit       % Albert's Loop
for j=1:T           % Upper's Loop
%Calculamos el consumo
cons(j)=1/(betar*exp(alpha0(l))*aletpc(j)^alpha1(l)*kap(j)^alpha2(l));
%Calculamos el capital
kap(j+1)=aletpc(j)*kap(j)^alpha-cons(j)+(1-delta)*kap(j);
end                 %End of Upper's loop
kap=kap(1:T);
%Cálculo del lado derecho del plinomio
for j=1:T-1
pol(j)=1/cons(j+1)*(alpha*aletpc(j+1)*kap(j+1)^(alpha-1)+(1-
delta));
end
expl=[exp(ones(size(1:T))'), log(aletpc)', log(kap)'];
b=expl(1:T-1,:)\log(pol')
finalb=[b']';
coef=[alpha0(l), alpha1(l), alpha2(l)];
maxdifcoef=max(abs(coef-finalb'));
coef1(l,:)=[alpha0(l), alpha1(l), alpha2(l)];
if maxdifcoef<0.0001
break
else
alpha0(l+1)=(finalb(1));
alpha1(l+1)=finalb(2);
alpha2(l+1)=finalb(3);
end
end                 %Albert's Loop
```

```
subplot(2,2,1);plot([log(pol)' (expl(1:T-1,:)*b)] ); title('Fit')
subplot(2,2,2);plot(kap); title('Kapital')
subplot(2,2,3);plot(cons);title('Consump')
subplot(2,2,4);plot(coef1);title('Param')
```

Con este programa surgen los siguientes gráficos: Figure 1 muestra la secuencia cuando el valor de k_0 es menor que el de estado estacionario. El gráfico titulado "Fit" muestra cómo el polinomio es ajustado con los valores de los parametros mostrados en "Param". Se puede ver cómo la convergencia se consigue con bastante rapidez.