Lecciones de Equilibrio General Computable con MatLab

Gonzalo Fernández de Córdoba Martos

Esta versión 28 de julio de 2002

1 Lección cuarta

En esta lección vamos a estudiar una economía muy similar a la estudiada en la lección anterior con la salvedad de que esta será una economía abierta. La economía abierta tiene, como vamos a ver, unas propiedades muy distintas a las de la economía cerrada. La propiedad fundamental es que si es posible importar bienes y capital, es posible que una economía con un stock inicial de capital bajo, quiera correr un déficit por cuenta corriente en los primeros periodos, mantener un alto nivel de consumo, y pagar más tarde al resto del mundo con un superávit. En una economía cerrada, para conseguir acumular un stock de capital hasta llegar al de estado estacionario, era necesario que el consumo en los primeros periodos fuera bajo y la inversión alta, acumular capital para el siguiente periodo y continuar con el plan de ahorro que llegara finalmente al stock de capital de estado estacionario. Los supuestos que vamos a realizar sobre esta economía son similares a los que ya hiciéramos en el modelo de crecimiento básico. Existe un consumidor representativo que maximiza su utilidad intertemporal y que posee los medios de producción capital y trabajo. Hay también una empresa representativa que minimiza costes y tiene beneficios iguales a cero. Además es posible importar el bien de consumo, que también lo es de inversión para, o bien consumir, o bien construir el stock de capital, o ambas cosas a la vez. Podemos plantear el equilibrio competitivo o el problema del planificador social para obtener la solución al problema. El problema del planificador social es:

$$\max_{\{c_t,k_t,b_t\}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

$$\begin{aligned} s.a.\ \ c_t + i_t + b_{t+1} &\leq y_t + (1+r)b_t \\ k_{t+1} &\leq i_t + (1-\delta)k_t \\ y_t &\leq Ak_t^\alpha \\ & \quad k_0, b_0 \text{ dados} \end{aligned}$$

La primera restricción introduce dos elementos nuevos, por un lado tenemos un bono, o activo del exterior que recoge la posición acreedora o deudora de nuestro país, y por otro lado tenemos r, que es el tipo de interés internacional. Vamos a considerar a r como un parámetro que está determinado en el resto del mundo y al que las decisiones de participar en el mercado de capitales internacional de nuestra economía no afectan. Es decir, estamos considerando que nuestra economía es una economía pequeña y abierta al resto del mundo. Su tamaño es tan pequeño en relación al resto del mundo que ninguna decisión de consumo o inversión de nuestra economía afecta al tipo de interés internacional. Vamos a suponer, como lo hicimos en lecciones anteriores que el capital es reversible, es decir, el bien de consumo se puede transformar en capital y el capital en bien de consumo sin necesidad de una tecnología que transforme uno en otro, o dicho de otra manera, los alimentos no consumidos son capital y el capital se puede comer. Como se puede ver, si la posición acreedora o deudora de nuestro país fuera siempre igual a cero $b_t = 0$ para todo t, estaríamos en la economía de la lección anterior. Vamos a suponer que la economía, al inicio del primer periodo, no tiene ninguna posición frente al resto del mundo, $b_0 = 0$. Queremos resolver el modelo y comprobar si este modelo tiene predicciones realistas en relación al comportamiento que observamos en las economías abiertas. Para resolver el modelo planteamos una versión más simple del problema sustituyendo la segunda y tercera restricción en la primera. Entonces tendríamos:

$$\max_{\{c_t,k_t,b_t\}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

$$\begin{aligned} s.a.\ \ c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t + b_{t+1} \ &\leq \ Ak_t^{\alpha} + (1+r)b_t \\ & \ \ \ \ k_0,\ \text{ y } b_0 \text{ dados} \end{aligned}$$

Planteamos la función auxiliar de Lagrange como:

$$L = \max_{\{c_t,k_t,b_t\}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[u(c_t) + \lambda_t \left(Ak_t^{\alpha} + (1+r)b_t - c_t - k_{t+1} + (1-\delta)k_t - b_{t+1}\right)\right]$$

para obtener las condiciones de primer orden del problema debemos computar las derivadas parciales de la función auxiliar de Lagrange con respecto a las variable de elección $\{c_t, k_t, b_t\}$, para lo cual es preciso darse cuenta de que en el momento $t-1$ tenemos términos con subíndice t. Es decir, si desarrollamos la función de Lagrange encontraremos:

$$\begin{aligned} &... + \beta^{t-1}\left[u(c_{t-1}) + \lambda_{t-1}\left(Ak_{t-1}^{\alpha} + (1+r)b_{t-1} - c_{t-1} - k_t + (1-\delta)k_{t-1} - b_t\right)\right] + \\ &\beta^t\left[u(c_t) + \lambda_t\left(Ak_t^{\alpha} + (1+r)b_t - c_t - k_{t+1} + (1-\delta)k_t - b_{t+1}\right)\right] + ... \end{aligned}$$

Derivando con respecto a nuestras variables de elección encontramos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial c_t} &= u'(c_t) - \lambda_t = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial k_t} &= \beta \lambda_t \left(A \alpha k_t^{\alpha-1} + (1-\delta) \right) - \lambda_{t-1} = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial b_t} &= \beta \lambda_t (1+r) - \lambda_{t-1} = 0
\end{aligned}$$

y dos condiciones de transversalidad. Despejando λ_t de la primera condición y sustituyendo en la tercera obtenemos

$$\beta(1+r)u'(c_t) - u'(c_{t-1}) = 0$$

Vemos que en un estado estacionario se tiene que cumplir que $u'(c_\tau) = u'(c_{\tau-1})$ o bien que $\beta(1+r) = 1$. Es decir, $\beta(1+r) = 1$es una condición necesaria para que la economía pueda ser estacionaria. La razón está bastante clara: si la tasa a la que descontamos el futuro es más alta que el tipo de interés internacional querría decir que el futuro es más importante para el agente representativo que para el resto del mundo, que descuenta el futuro a una tasa $\frac{1}{(1+r)}$ más baja. En este caso nuestra economía acumularía de forma ilimitada. En caso contrario se endeudaría sin límites. No parece que esta sea una propiedad que queramos tener en el modelo. Por tanto asumimos la condición necesaria de estacionariedad y fijamos para nuestro modelo $\beta = \frac{1}{(1+r)}$. Pero ahora surge un pequeño problema. En el estado estacionario esta ecuación no nos proporciona información alguna sobre ninguna de las variables que queremos determinar, sólo proporciona información sobre el valor de algunos parámetros del modelo. La segunda condición nos dice que en el estado estacionario

$$k_{ss} = \left[\frac{A * \alpha}{r + \delta} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}. \tag{1}$$

Este resultado llevado a la restricción del problema de optimización nos dice que

$$c_{ss} + \delta k_{ss} = A k_{ss}^{\alpha} + r b_{ss} \tag{2}$$

No es mucha la información que obtenemos del sistema formado por las condiciones de primer orden. Para poder determinar las trayectorias de equilibrio tenemos que conjeturar una solución y después comprobar que efectivamente nuestra conjetura era correcta. Podemos imaginar una economía escasa en capital en relación al resto del mundo. Si esta economía se abre al comercio internacional podría realizar en el primer periodo todas las importaciones que necesita para construir su stock de capital y además situar su patrón de consumo en el nivel de estado estacionario c_{ss}. Si esta economía opta por esta solución, está claro que en el primer periodo correría un déficit por cuenta corriente y un déficit comercial que luego saldaría a la tasa r a lo largo del resto de su vida, generando un pequeño superávit en cada periodo. Para ver que esta es la única solución vamos a escribir la restricción presupuestaria para los periodos $t = \{1, 2\}$, ya que a partir del periodo 2 la ecuación 4 se repite para siempre. La secuencia de los eventos es la siguiente: al inicio del primer periodo se dispone de una cantidad de capital k_0 y de unos activos frente al resto del mundo de b_0, entonces se inicia el proceso productivo del primer periodo, y al final del primer periodo se toman las decisiones de consumo e inversión. La inversión se incorpora al capital con el que empieza la economía en el segundo periodo, $k_1 = i_1 + (1 - \delta)k_0$, se pone en marcha el proceso productivo y al final del segundo periodo se toman unas nuevas decisiones de inversión y consumo, y así para siempre. Por tanto las dos restricciones para el primer y segundo periodo son:

$$\begin{aligned} b_{ss} + c_{ss} + k_{ss} - (1 - \delta)k_0 &= Ak_0^{\alpha} + (1 + r)b_0 && (3) \\ b_{ss} + c_{ss} + \delta k_{ss} &= Ak_{ss}^{\alpha} + (1 + r)b_{ss} && (4) \end{aligned}$$

Si computamos la diferencia entre 4 y 3, obtenemos:

$$0 = A(k_{ss}^{\alpha} - k_0^{\alpha}) + (1 - \delta)(k_{ss} - k_0) + (1 + r)(b_{ss} - b_0) \tag{5}$$

Donde k_{ss} es el encontrado en la ecuación 1 y el par (k_0, b_0) es conocido. De la ecuación 5 podemos obtener el valor de b_{ss}, que sería compatible con el plan propuesto. Este valor viene dado por

$$bss = b_0 - \frac{A * (k_{ss}^{\alpha} - k_0^{\alpha}) + (1 - \delta) * (k_{ss} - k_0)}{(1 + r)}$$

Como se puede ver, cuanto más parecido fuera el estado inicial del stock k_0 en relación al estado final del stock k_{ss}, menor sería la cantidad de capital importado por esta economía. Además, cuanto mayor fuera la cantidad de activos frente al resto del mundo poseídos por este país frente al resto del mundo también sería la menor la necesidad de financiación por parte del resto del mundo. De la ecuación 2, obtenemos la cantidad de consumo de estado estacionario compatible con el nivel de deuda encontrado, esta sería

$$c_{ss} = A * k_{ss}^{\alpha} - \delta k_{ss} + r b_{ss}.$$

Como es natural, cuanto mayor fuera la necesidad de financiación menor será la cantidad de consumo de estado estacionario, dado que éste tiene que compensar las devoluciones al interés r que se producirán para siempre. El superávit comercial que debe producirse en cada periodo para mantener la cuenta corriente equilibrada será,

$$td_{ss} = Ak_{ss}^{\alpha} - c_{ss} - \delta k_{ss} = -rb_{ss}.$$

Veamos cuales son la predicciones del modelo para España tras la apertura en 1986 al mercado de la Unión Europea. Para ello vamos a tomar algunos hechos de la contabilidad nacional. Sabemos de las Penn World Tables de Summers y Heston que

$$\frac{k_{1992}}{y_{1992}} = 3.5$$

Por otro lado sabemos que la participación de las rentas del capital en la renta nacional fue

$$\frac{(r+\delta)k_{1992}}{y_{1992}} = 0.35$$

Si arbitrariamente hacemos $y_{1992} = 100$, entonces $k_{1992} = 350$ y podemos resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} y_{1992} &= Ak_{1992}^{\alpha} && (6) \\ (r+\delta)k_{1992}^{(1-\alpha)} &= A\alpha && (7) \end{aligned}$$

para A y α. La ecuación 6 es simplemente la función de producción y la ecuación 7 se deriva de la condición de primer orden. Para calcular los valores de A y α, simplemente fijamos los valores de $r = 0.04$, y $\delta = 0.06$. El valor de r viene dado por el tipo de interés de largo plazo en Alemania (que es la economía grande de mayor importancia para España) y el valor de δ viene de la contabilidad nacional. Una vez que hemos fijado estos dos parámetros sólo tenemos que escribir un pequeño programa con el método de newton para encontrar que

$$\begin{aligned} A &= 12.8699 \\ \alpha &= 0.3500 \end{aligned}$$

Con estos valores podemos iniciar un programa muy simple para calcular los valores de las variables en el estado estacionario. Únicamente tenemos que decidir cuál será el valor de k_0. Parece razonable pensar que España estaba a un 80% del stock de capital de estado estacionario. Además, España tenía en 1986 una posición acreedora frente al resto del mundo de un 2% del PIB, por tanto fijamos $b_0 = 2$. Con estos valores podemos calcular la cuenta corriente, el déficit comercial, el stock de capital de estado estacionario y la producción a lo largo del tiempo. Un gráfico ilustra a qué se debería parece la economía española en caso de que el modelo fuera una representación correcta de la realidad. En la Figura 1, a la izquierda obtenemos la trayectoria de equilibrio para el PIB de la economía española después de su apertura en 1986. En sólo un año debería haber alcanzado el nivel de la economía estacionaria. Esto habría sido posible si la trayectoria del stock de capital hubiera sido la que aparece en la Figura 1 derecha, en la que vemos la trayectoria del stock del capital. En un sólo año la economía española habría construido su stock de capital de estado estacionario. El plan financiero compatible con el plan de producción lo vemos en la Figura 2.

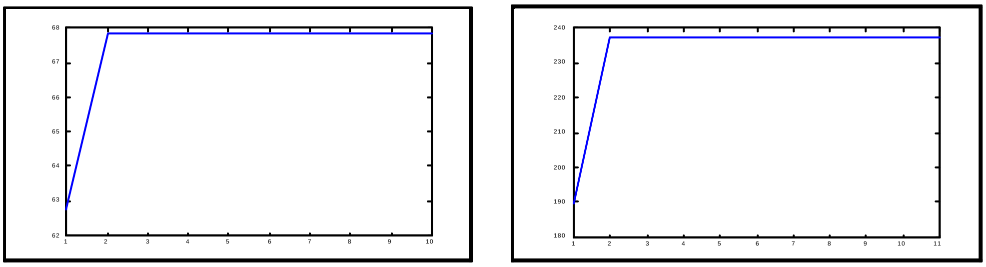

FIGURA 1

Lo más sorprendente del modelo es que predice que el déficit por cuenta corriente debería haber alcanzado un 68% del producto interior bruto el primer año para cerrarse completamente al año siguiente. Además, en este corto periodo de tiempo España debería haber construido completamente su stock de capital hasta situarlo en el estado estacionario. Ya con su stock de capital de estado estacionario habría producido un superávit por cuenta corriente cada año para ir cancelando su deuda pagando una anualidad del 2.73% del producto interior bruto. Parece que las cosas no fueron exactamente así, tal y como se puede apreciar en la Figura 3.

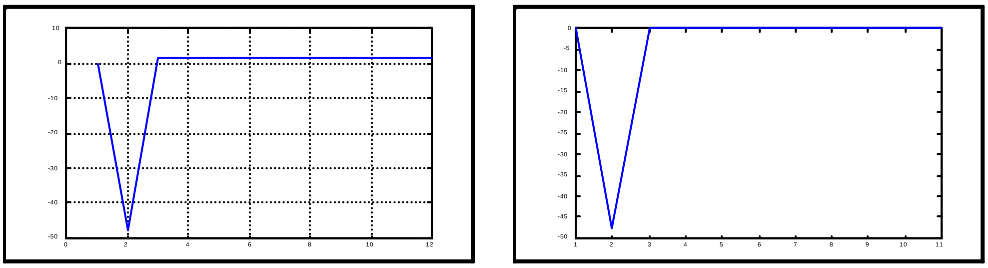

FIGURA 2

El déficit por cuenta corriente no llegó a ser el 4% del PIB. Esta cantidad no es poca pero está un poco alejada del 68% del modelo. No sólo el mínimo es mayor en los datos, sino que sucedió cerca de 7 años después.

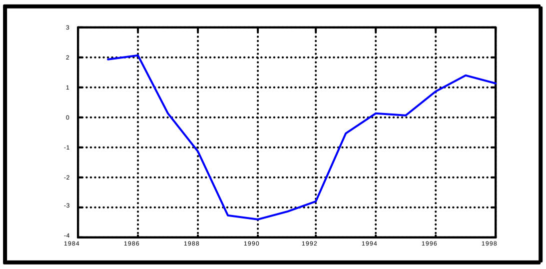

FIGURA ·3

¿Qué es lo que está mal en el modelo?, o mejor expresado, ¿qué es lo que está mal en el mundo?. Son varias las cosas que nos deberían hacer pensar que todo sucede demasiado intensamente en el modelo y que todo sucede demasiado rápido. Por un lado, un país no fija un acuerdo de préstamo con un único prestamista con el que pueda negociar una anualidad eterna. Por otro lado, en caso de que ese prestamista existiera, no estaría dispuesto a realizar semejante contrato de préstamo, porque suponiendo que lo hiciera, quién garantiza al prestamista que recibirá su dinero. Una vez que el país a construido su stock de capital de estado estacionario, ¿que castigo puede recibir del prestamista en caso de no pagar?. pero no sólo eso, ¿quién puede levantar un stock de capital de estado estacionario en un sólo año?. Construir el capital lleva tiempo, y más tiempo cuanto más pobre fuera el país. Tenemos varias razones para cambiar la especificación del modelo e ir introduciendo nuevos elementos que dificulten el rapidísimo ajuste que hemos observado en nuestro primer modelo de una economía abierta. Tenemos una razón adicional para introducir un nuevo elemento en nuestro modelo, y esta es que el tipo de cambio real varió de un modo sustancial a lo largo de todo el periodo que abarca 1986-1996. Sufrió una apreciación real de un 19%, alcanzando la máxima apreciación en 1992, para luego sufrir una depreciación real que lo llevo de nuevo a los niveles de 1986. En nuestro modelo con un único bien no podemos definir el tipo de cambio real puesto que éste es simplemente el precio del bien que se comercializa en los mercados y por la ley de un precio éste es igual en todas partes. Por tanto lo primero que nos gustaría introducir es la existencia de dos tipos de bienes distintos. Consideraremos que un bien es comercializado y su precio es por tanto el precio internacional, ya que si fuera distinto en un lugar y en otro se realizaría una operación de arbitraje beneficiosa comprando donde es barato y vendiendo donde es caro, igualando finalmente su precio. Por otro lado tendremos un bien que por su naturaleza no puede ser comercializado, como sería el caso de los edificios, las carreteras, los bienes inmuebles y en general los servicios de la economía. Estos bienes tendrán un precio distinto en cada país puesto que por su naturaleza, la ley de un precio no puede operar ya que las operaciones de arbitraje no son posibles. Los bienes transables los podremos identificar con los bienes agrícolas y los bienes industriales como manufacturas y recursos primarios. Este modelo lo definiremos y lo resolveremos en el siguiente capitulo, pero antes vamos a ver el código de MatLab con el que hemos realizado los gráficos para que podamos experimentar con tros países, otras especificaciones de los parámetros y otras funciones de producción para comprobar que efectivamente esta alta velocidad de ajuste y la alta intensidad del mismo son una propiedad del modelo y no de una especificación particular del mismo.

```
%open.m
    %Este programa resuelve el modelo básico de crecimiento
    % inf
    %max sum beta^t (c(t)^(1-eta)-1)/(1-eta)
    % t=0
    % s.a. b(t+1)+c(t)+k(t+1)-(1-delta)*k(t)<=A*k^alpha+(1+r)*b(t)
    % k(0) dado, b(0) dado
    clear
    %Definición de parámetros del modelo
    A = 10;
```

```
alpha = 0.35;
delta = 0.06;
eta = 0.99;
r = 0.04;
beta = 1/(1+r);
%Definición de parámetros del programa
maxit = 1000;
crit = 1e-3;
T = 10;
%Definición de k0, b0 y kss
kss = ((r+delta)/(A*alpha))^(1/(alpha-1));
k0 = 0.8*kss;
b0 = 0;
bss = -(A*(kss^alpha-k0^alpha)+(1-delta)*(kss-k0))/(1+r)-b0;
css = A*kss^alpha-delta*kss+r*bss;
%Definición de la semilla
kg = [k0 kss*ones(size(1:T-1))]';
b = [b0 bss*ones(size(1:T+1))];
%Llamada a secant.m
param = [A alpha delta eta beta T k0 kss css b];
sol = secant('opencpo', kg, param, crit, maxit);
k = [k0; sol];
ca = [0 b(2:T+1)-b(1:T)];
y(1) = A*k0^alpha;
y = [y(1); A*k(2:T).^alpha];
td(1) = 0;
td(2) = A*k0^alpha-css+(1-delta)*k0-kss;
td = [td(1); td(2); A*k(2:T+1).^alpha-css-delta*kss];
figure(1)
plot(y)
title('Producto')
figure(2)
plot(k)
title('Capital')
figure(3)
plot(ca)
title('Cuenta corriente')
figure(4)
```

```
plot(td)
title('déficit comercial')
```

Este problema podríamos haberlo resuelto sin necesidad de recurrir al programa **secant.m** ya que de las ecuaciones expuestas en el texto podemos derivar los valores de equilibrio para todas las variables en cualquier momento del tiempo. La razón por la que lo hemos hecho de este modo es para mostrar que efectivamente la semilla propuesta, que es la solución, no se ve modificada después de introducirla en las condiciones de equilibrio. Es decir, la semilla es la solución al problema de optimización. El programa **opencpo.m** es como sigue:

```
function f=opencpo(z, p)
    %función cpo.m donde se encuentran nuestras
    %condiciones de primer orden
    %Asignación de parámetros
    A = p(1);
    alpha = p(2);
    delta = p(3);
    eta = p(4);
    beta = p(5);
    T = p(6);
    k0 = p(7);
    kss = p(8);
    css = p(9);
    b0 = p(10);
    r = 1/beta-1;
    for i=11:length(p)
    b(i-10)=p(i);
    end
```

```
%Asignación de variables
for t=1:T
k(t) = z(t);
end
k(T+1) = kss;
f(1)=b(1)+css+k(1)-(1-delta)*k0-A*k0^alpha-(1+r)*b0;
for t=1:T
f(t)=b(t+1)+css+k(t+1)-(1-delta)*k(t)-A*k(t)^alpha-(1+r)*b(t);
end
f=f';
```