

# Tema 1: Introducción a la Macroeconomía dinámica

José L. Torres

Universidad de Málaga

Hora 3 (29 septiembre 2011)

# Tema 1: Introducción a la Macroeconomía Dinámica

- 1 Introducción a la Macroeconomía.
- 2 **Ecuaciones diferenciales y sistemas dinámicos.**
- 3 Un ejemplo de sistema dinámico.

## 1.2. Ecuaciones diferenciales y sistemas dinámicos

- Importancia de considerar el tiempo ( $t$ ).
- No todas las variables económicas se mueven a la misma velocidad. Los precios de los bienes se ajustan muy lentamente mientras que, por ejemplo, el tipo de cambio se ajusta de manera inmediata.
- Dos posibilidades: tiempo continuo y tiempo discreto.

## 1.2. Ecuaciones diferenciales y sistemas dinámicos

### DEFINICIÓN DE MODELO:

- Concepto de modelo: Mapa, plano, ...
- Un modelo macroeconómico puede describirse como un sistema de ecuaciones diferenciales. Estas ecuaciones incluyen un número de relaciones dinámicas entre un conjunto de variables endógenas  $X_t \in R^n$  y con conjunto de variables exógenas  $Z_t \in R^m$ .
- Igual que en un sistema físico, excepto por una importante diferencia: el comportamiento de la economía depende de las expectativas generadas por el pensamiento humano.

## 1.2. Ecuaciones diferenciales y sistemas dinámicos

Modelo general:

$$X_t = E_t [F(X_{t+1}, Z_t, u_t)]$$

$$Z_t = G(Z_{t-1}, v_t)$$

donde  $X_t$  es un vector de variables endógenas,  $Z_t$  vector de variables exógenas,  $E_t$  operador de expectativas,  $u_t$  y  $v_t$  son perturbaciones aleatorias i.i.d.

$F$  : Teoría Económica.

$G$ : Regla de política.

- Solución: Secuencia de distribuciones de probabilidad.

## 1.2. Ecuaciones diferenciales y sistemas dinámicos

Vamos a simplificar el modelo general.

- Primer paso: Eliminamos la regla de política ( $G = 0$ ):

$$X_t = E_t [F(X_{t+1}, Z_t, u_t)]$$

- Segundo paso: Eliminamos la existencia de incertidumbre ( $u_t = 0$ ):

$$X_t = [F(X_{t+1}, Z_t)]$$

## 1.2. Ecuaciones diferenciales y sistemas dinámicos

Vamos a reescribir el modelo anterior en términos de un sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\dot{X}_t = F(X_t, Z_t) \quad (1)$$

donde

$$\dot{X}_t = \frac{dX_t}{dt} \quad (2)$$

Es más fácil trabajar con logaritmos:

$$x_t = \ln X_t \quad (3)$$

Así, la derivada con respecto al tiempo es equivalente a la tasa de crecimiento de la variable:

$$\dot{x}_t = \frac{d \ln X_t}{dt} = \frac{\frac{dX_t}{dt}}{X_t} = \frac{\dot{X}_t}{X_t} \quad (4)$$

## 1.2. Ecuaciones diferenciales y sistemas dinámicos

Definición de equilibrio: **Estado Estacionario**:

$$\bar{x} \implies \dot{x}_t = f(x_t, z_t) = 0 \implies f(\bar{x}, z_t) = 0 \quad (5)$$

Vector de ceros de dimensión  $n$ . El sistema de ecuaciones diferenciales podemos escribirlo como:

$$\dot{x}_t = Ax_t + Bz_t \quad (6)$$

donde  $A$  es una matriz  $n \times n$ ,  $B$  es una matriz  $n \times m$  y  $z_t$  es el vector de variables exógenas  $m \times 1$ .

Vamos a trabajar siempre con dos ecuaciones, para poder realizar representaciones gráficas. Por tanto  $n = 2$ .

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{1,t} \\ \dot{x}_{2,t} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{bmatrix} + Bz_t \quad (7)$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (8)$$

## 1.2. Ecuaciones diferenciales y sistemas dinámicos

Cálculo del Estado Estacionario:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{1,t} \\ \dot{x}_{2,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies A \begin{bmatrix} \bar{x}_{1,t} \\ \bar{x}_{2,t} \end{bmatrix} = -Bz_t \quad (9)$$

o

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_{1,t} \\ \bar{x}_{2,t} \end{bmatrix} = -A^{-1}Bz_t \quad (10)$$

Esta es la forma que vamos a utilizar para calcular el valor de estado estacionario de las variables endógenas.

## 1.2. Ecuaciones diferenciales y sistemas dinámicos

### Concepto de Estabilidad:

$$\text{Det} [A - \lambda I] = 0 \quad (11)$$

$$\text{Det} \left[ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right] = 0 \quad (12)$$

Solución:

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0 \quad (13)$$

Tres posibles soluciones:

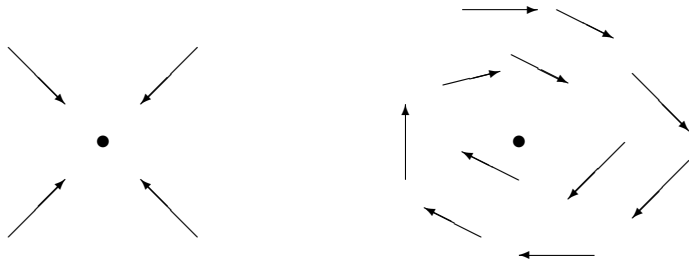
Raíces	Caso 1	Caso 2	Caso 3
$\lambda_1$	$<0$	$<0$	$>0$
$\lambda_2$	$<0$	$>0$	$>0$

## 1.2. Ecuaciones diferenciales y sistemas dinámicos

- Caso 1 ( $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ ): Estabilidad global. Todas las trayectorias tienden al estado estacionario.
- Caso 2 ( $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$ ): Punto de silla. Hay trayectorias que tienden al estado estacionario pero también trayectorias que se alejan del equilibrio.
- Caso 3 ( $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ ): Inestabilidad global. Todas las trayectorias tienden a alejarnos del estado estacionario.

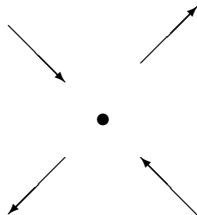
## 1.2. Ecuaciones diferenciales y sistemas dinámicos

Caso 1:  $(\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0)$



## 1.2. Ecuaciones diferenciales y sistemas dinámicos

Caso 2 ( $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$ )



## 1.2. Ecuaciones diferenciales y sistemas dinámicos

Caso 3:  $(\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0)$

