Clase 8: La decisión consumo-ahorro

José L. Torres

Universidad de Málaga

Macroeconomía Avanzada

8. La decisión cosumo-ahorro

- La economía está poblada por millones de consumidores (o familias) y cada uno de ellos toma decisiones económcias.
- Supuesto: Los agentes tienen idénticas preferencias (quieren ser felices). Concepto del agente representativo.
- Supuesto: Los agentes son optimizadores (es decir, maximizan una determinada función objetivo). En el caso de los consumidores es la función de utilidad o función de felicidad.
- Supuesto: El tiempo es discreto.

8. La decisión consumo-ahorro

- Función de utilidad o felicidad instantánea:

$$U(C_t) \tag{1}$$

- Supuestos: es una función estrictamente creciente, estrictamente cóncava y dos veces diferenciable tal que:

$$U'(C_t) > 0 \qquad U''(C_t) < 0 \tag{2}$$

8. La decisión consumo-ahorro

- El problema del consumidor sería:

$$\max_{(C_t)} E_t \sum_{t=0}^{T} \beta^t U(C_t) \tag{3}$$

siendo E_t la esperanza matemática en el momento t, condicionada a la información disponible en dicho momento del tiempo y donde β es el factor de descuento intertemporal, $\beta \in (0,1)$, siendo:

$$\beta = \frac{1}{1+\theta} \tag{4}$$

donde θ es la tasa de preferencia subjetiva intertemporal ($\theta > 0$).

- Restricción presupuestaria:

$$C_t + B_t = W_t + (1+R_t)B_{t-1} \tag{5}$$

8. La decisión consumo-ahorro

- Los consumidores establecen un plan óptimo de consumo a lo largo de su vida.
- El resultado que vamos a obtener es el siguiente: El plan de consumo óptimo en el periodo actual es proporcional al valor descontado de la riqueza total, de tal forma que el agente puede separar el perfil temporal del consumo del correspondiente a la renta.
- El consumo actual no está restringido por la renta actual.

8. La decisión consumo-ahorro

- El problema del consumidor con vida finita. En este caso el problema del consumidor sería:

$$\max_{(C_t)} E_t \sum_{t=0}^{T} \beta^t U(C_t) \tag{6}$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} C_t + B_t &= W_t + (1 + R_t) B_{t-1} && (7) \\ B_{-1} &= 0 && (8) \\ B_T &= 0 && (9) \end{aligned}$$

8. La decisión consumo-ahorro

Estructura del problema del consumidor	
Función de utilidad	$U = U(C_t)$
Restricción presupuestaria	$C_t + B_t = (1 + R_{t-1})B_{t-1} + W_t$
Stock de activos inicial	$B_{-1} = 0$
Stock de activos final	$B_T = 0$

8. La decisión consumo-ahorro

El lagrangiano correspondiente al anterior problema sería:

$$\mathcal{L} = \beta^t \left\{ U(C_t) - \lambda_t (C_t + B_t - W_t - (1 + R_t) B_{t-1}) \right\} \tag{10}$$

Resolviendo el anterior problema encontramos que las condiciones de primer orden son las siguientes:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_t} = U'(C_t) - \lambda_t = 0 \tag{11}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B_t} = -\beta^t \lambda_t + \beta^{t+1} \lambda_{t+1} (1 + R_{t+1}) = 0 \tag{12}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_t} = C_t + B_t - Y_t - (1 + R_t) B_{t-1} = 0 \tag{13}$$

8. La decisión consumo-ahorro

A la hora de definir la función de Lagrange hemos de tener en cuenta que la restricción presupuestaria, que es una ecuación en diferencias para el stock de activos financieros, vendría definida para cada periodo y, por tanto, su incorporación a la función de Lagrange resulta en los siguientes términos para t y $t+1$:

$$\begin{aligned} &\ldots - \lambda_t \left[C_t + B_t - W_t - (1 + R_{t-1}) B_{t-1} \right] \\ &- \lambda_{t+1} \left[C_{t+1} + B_{t+1} - W_{t+1} - (1 + R_t) B_t \right] - \ldots \end{aligned} \tag{14}$$

8. La decisión consumo-ahorro

Despejando de la primera condición de primer orden y sustituyendo en la segunda, obtenemos:

$$\beta^t U'(C_t) = \beta^{t+1} U'(C_{t+1})(1 + R_{t+1}) \tag{15}$$

y operando resulta:

$$U'(C_t) = \beta U'(C_{t+1})(1 + R_{t+1}) \tag{16}$$

8. La decisión consumo-ahorro

Solución al problema del consumidor	
Senda óptima de consumo	$U_C(C_t) = \beta(1+R_t)U_C(C_{t+1})$
Variación activos financieros	$B_t = (1+R_{t-1})B_{t-1} + W_t L_t - C_t$

8. La decisión consumo-ahorro

- El estado estacionario vendría dado por aquel valor para el nivel de consumo que se mantiene constante en el tiempo. Así, si $C_t = C_{t+1} = \overline{C}$, entonces resulta que $U_C(\overline{C}) = \beta U_C(\overline{C})(1 + R_t)$, implicando que el valor de estado estacionario para el tipo de interés vendría dado por:

$$\overline{R} = \frac{1-\beta}{\beta} = \frac{1 - \frac{1}{1+\theta}}{\frac{1}{1+\theta}} = \theta \tag{17}$$

es decir, en estado estacionario el tipo de interés sería igual a la tasa de preferencia subjetiva intertemporal. Si se cumple esta condición, entonces la senda óptima de consumo implicaría un nivel de consumo igual para todos los periodos.

8. La decisión consumo-ahorro

- Ejemplo: función de utilidad logarítmica
- Para resolver numéricamente el problema del consumidor planteado anteriormente, necesitamos definir que forma funcional específica tiene la función de utilidad. En nuestro caso vamos a suponer que la función de utilidad tiene forma logarítmica, que es una forma funcional muy utilizada en la práctica por su simplicidad.
- En este caso, el problema del consumidor vendría dado por:

$$\max_{\{C_t\}_{t=0}^{T}} \sum_{t=0}^{T} \beta^t \ln C_t \tag{18}$$

sujeto a la restricción presupuestaria y condiciones inicial y final.

8. La decisión consumo-ahorro

- El problema a resolver, utilizando la función auxiliar de Lagrange, sería:

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{T} \left[\beta^t \ln C_t - \lambda_t (C_t + B_t - W_t - (1 + R_{t-1}) B_{t-1}) \right] \tag{19}$$

Las condiciones de primer orden son las siguientes:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_t} \quad : \quad \beta^t \frac{1}{C_t} - \lambda_t = 0 \tag{20}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B_t} \quad : \quad -\lambda_t + \lambda_{t+1}(1 + R_t) = 0 \tag{21}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_t} \quad : \quad C_t + B_t - W_t - (1 + R_{t-1}) B_{t-1} = 0 \tag{22}$$

8. La decisión consumo-ahorro

- Despejando el valor del multiplicador de Lagrange de la primera condición de primer orden y sustituyendo en la segunda condición de primer orden, obtenemos:

$$\beta^t \frac{1}{C_t} = \beta^{t+1} \frac{1}{C_{t+1}} (1 + R_t) \tag{23}$$

y operando resulta:

$$C_{t+1} = \beta(1 + R_t) C_t \tag{24}$$

indicando la relación entre el nivel de consumo en el periodo $t + 1$ con el consumo en t, estando dicha relación determinada por el parámetro de preferencias β, el tipo de interés real y la forma funcional específica utilizada para la utilidad.

Solución al problema del consumidor	
Función de utilidad logarítmica	
Senda óptima de consumo	$C_{t+1} = \beta(1 + R_t)C_t$
Variación activos financieros	$B_t = (1 + R_{t-1})B_{t-1} + W_t L_t - C_t$