Clase 2: Un ejemplo de sistema dinámico: El modelo de Richardson

José L. Torres

Universidad de Málaga

Macroeconomía Avanzada

2. Un ejemplo de sistema dinámico: El modelo de Richardson

Sistema Dinámico:

$$\begin{bmatrix} \Delta x_{1,t} \\ \Delta x_{2,t} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\alpha & \beta \\ \gamma & -\delta \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \theta & 0 \\ 0 & \eta \end{bmatrix}}_{B} \begin{bmatrix} z_{1,t} \\ z_{2,t} \end{bmatrix} \tag{1}$$

Condiciones de equilibrio parcial:

$$\Delta x_{1,t} = -\alpha x_{1,t} + \beta x_{2,t} + \theta z_{1,t} \tag{2}$$

$$\Delta x_{2,t} = \gamma x_{1,t} - \delta x_{2,t} + \eta z_{2,t} \tag{3}$$

2. Un ejemplo de sistema dinámico: El modelo de Richardson

Estructura del modelo de carrera de armamentos	
Función de reacción del país 1	$\Delta x_{1,t} = -\alpha x_{1,t} + \beta x_{2,t} + \theta z_{1,t}$
Función de reacción del país 2	$\Delta x_{2,t} = \gamma x_{1,t} - \delta x_{2,t} + \eta z_{2,t}$
Variación del stock de armamento país 1	$\Delta x_{1,t} = x_{1,t+1} - x_{1,t}$
Variación del stock de armamento país 2	$\Delta x_{2,t} = x_{2,t+1} - x_{2,t}$

2. Un ejemplo de sistema dinámico: El modelo de Richardson

- Definición de estado estacionario:

$$\bar{\mathbf{x}} \Longrightarrow \dot{\mathbf{x}}_t = f(\mathbf{x}_t, \mathbf{z}_t) = 0 \Longrightarrow f(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{z}_t) = 0 \tag{4}$$

- Para obtener el estado estacionario de nuestro sistema, calculamos el vector de ceros para nuestro vector de variaciones respecto al tiempo. Esto significa que la matriz A multiplicada por el vector de variables endógenas tiene que ser igual al negativo de la matriz B por el vector de variables exógenas. En esta situación, el vector de variables endógenas se correspondería con su valor de estado estacionario, tal que:

$$\begin{bmatrix} \Delta x_{1,t} \\ \Delta x_{2,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow A \begin{bmatrix} \bar{x}_{1,t} \\ \bar{x}_{2,t} \end{bmatrix} = -Bz_t \tag{5}$$

2. Un ejemplo de sistema dinámico: El modelo de Richardson

- Despejando el vector de variables en estado estacionario obtenemos la siguiente expresión que nos permite calcular el valor de cada variable endógena en equilibrio:

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_{1,t} \\ \bar{x}_{2,t} \end{bmatrix} = -A^{-1}Bz_t \tag{6}$$

bajo el supuesto de que la matriz A es no singular, es decir, $Det(A) \neq 0$, para que exista su inversa (es decir, suponemos que el $rango(A) = 2$).

2. Un ejemplo de sistema dinámico: El modelo de Richardson

- Cálculo del valor de las variables en Estado Estacionario: En el modelo que estamos analizando tendríamos que:

$$A = \begin{bmatrix} -\alpha & \beta \\ \gamma & -\delta \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} \theta & 0 \\ 0 & \eta \end{bmatrix}, \qquad z_t = \begin{bmatrix} z_{1,t} \\ z_{2,t} \end{bmatrix} \tag{7}$$

- Calculando la inversa de la matriz A resulta:

$$A^{-1} = \frac{1}{\alpha\delta - \gamma\beta} \begin{bmatrix} -\delta & -\beta \\ -\gamma & -\alpha \end{bmatrix} \tag{8}$$

por lo que el estado estacionario, usando la definición dada por (6), vendría dado por:

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_{1,t} \\ \bar{x}_{2,t} \end{bmatrix} = -\frac{1}{\alpha\delta - \gamma\beta} \begin{bmatrix} -\delta & -\beta \\ -\gamma & -\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta & 0 \\ 0 & \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{1,t} \\ z_{2,t} \end{bmatrix} \tag{9}$$

2. Un ejemplo de sistema dinámico: El modelo de Richardson

- Multiplicando las matrices anteriores resulta que el valor de las variables en estado estacionario viene dado por las siguientes expresiones:

$$\bar{x}_{1,t} = \frac{\delta\theta}{\alpha\delta - \gamma\beta} z_{1,t} + \frac{\beta\eta}{\alpha\delta - \gamma\beta} z_{2,t} \tag{10}$$

$$\bar{x}_{2,t} = \frac{\gamma\theta}{\alpha\delta - \gamma\beta} z_{1,t} + \frac{\alpha\eta}{\alpha\delta - \gamma\beta} z_{2,t} \tag{11}$$

- Para obtener un estado estacionario en este modelo, tiene que cumplirse que $\alpha\delta - \gamma\beta \neq 0$, puesto que en caso contrario el determinante de la matriz A sería 0.

2. Un ejemplo de sistema dinámico: El modelo de Richardson

Análisis de Estabilidad: Calcularíamos:

$$Det\left[A - \lambda I\right] = 0 \tag{12}$$

donde I es la matriz identidad y λ es el vector de valores propios, siendo:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{13}$$

2. Un ejemplo de sistema dinámico: El modelo de Richardson

- Por tanto, volviendo al sistema definido en (1), dada la matriz A, tendríamos

$$Det \begin{bmatrix} -\alpha & \beta \\ \gamma & -\delta \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = Det \begin{bmatrix} -\alpha - \lambda & \beta \\ \gamma & -\delta - \lambda \end{bmatrix} = 0 \tag{14}$$

- Calculando el determinante, agrupando términos e igualando a cero, llegamos a la siguiente ecuación de segundo grado:

$$\lambda^2 + \lambda(\alpha + \delta) + (\alpha\delta - \gamma\beta) = 0 \tag{15}$$

o equivalentemente

$$\lambda^2 - tr(A)\lambda + Det(A) = 0 \tag{16}$$

donde $tr(A)$ es la traza de la matriz A.

2. Un ejemplo de sistema dinámico: El modelo de Richardson

- Resolviendo, obtenemos que las raíces (valores propios) van a ser las siguientes:

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{-(\alpha+\delta) \pm \sqrt{(\alpha+\delta)^2 - 4(\alpha\delta - \gamma\beta)}}{2} \tag{17}$$

- La estabilidad del sistema va a depender de los valores resultantes para los valores propios, λ_1, λ_2.

2. Un ejemplo de sistema dinámico: El modelo de Richardson

- Estos valores propios pueden ser reales o complejos, dependiendo del signo de $(\alpha+\delta)^2 - 4(\alpha\delta - \gamma\beta)$.
- Si su valor es positivo, entonces los valores propios serían números reales.
- Por el contrario, si su valor es negativo, entonces tendríamos números complejos. No obstante, en este modelo concreto, este último caso no se va a producir, puesto que $(\alpha+\delta)^2 - 4(\alpha\delta - \gamma\beta) = \alpha^2 + \delta^2 + 2\alpha\delta - 4\alpha\delta + 4\gamma\beta = (\alpha-\delta)^2 + 4\gamma\beta$, que siempre es mayor o igual a 0.

2. Un ejemplo de sistema dinámico: El modelo de Richardson

- En el caso de que las raíces sean reales, el módulo, es decir, el valor absoluto, se define como:

$$Módulo(\lambda + 1) = |\lambda + 1| \tag{18}$$

- En el caso en que las raíces sean complejas, esto es, $\lambda = a \pm bi$, entonces el módulo se definiría como:

$$Módulo(\lambda + 1) = \sqrt{(a+1)^2 + b^2} \tag{19}$$

2. Un ejemplo de sistema dinámico: El modelo de Richardson

- El sistema mostraría estabilidad global, esto es, todas las trayectorias convergen al estado estacionario, si $|\lambda_1 + 1| < 1$ y $|\lambda_2 + 1| < 1$, en el caso de que los valores propios sean números reales.
- Si los valores propios son números complejos, $\lambda = a \pm bi$, entonces tendría que cumplirse que $\sqrt{(a+1)^2 + b^2} < 1$.
- Si, por el contrario el módulo de una de las raíces más uno es superior a la unidad, por ejemplo, $|\lambda_1 + 1| < 1$ y $|\lambda_2 + 1| > 1$, entonces la solución presentaría un punto de silla, donde existirían trayectorias tanto convergentes como divergentes.
- Finalmente, si resulta que $|\lambda_1 + 1| > 1$ y $|\lambda_2 + 1| > 1$, para el caso de raíces reales, o bien $\sqrt{(a+1)^2 + b^2} > 1$, para el caso de raíces complejas, entonces el sistema presentaría inestabilidad global, donde todas las trayectorias serían divergentes respecto al estado estacionario.

2. Un ejemplo de sistema dinámico: El modelo de Richardson

- Dos posibles situaciones.
- A) Estabilidad global, cuando:

$$|\lambda_1 + 1| < 1 \tag{20}$$
$$|\lambda_2 + 1| < 1 \tag{21}$$

- B) Punto de silla, cuando:

$$|\lambda_1 + 1| < 1 \tag{22}$$
$$|\lambda_2 + 1| > 1 \tag{23}$$

En el caso de punto de silla, existe una única senda, denominada senda estable, que nos lleva al estado estacionario.

2. Un ejemplo de sistema dinámico: El modelo de Richardson

- En el caso de que tengamos un punto de silla, hemos de proceder a calcular la senda estable.
- La solución del sistema de ecuaciones lineales que estamos resolviendo se puede expresar de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{bmatrix} = v_1(\lambda_1 + 1)^t a_1 + v_2(\lambda_2 + 1)^t a_2 + \begin{bmatrix} \bar{x}_{1,t} \\ \bar{x}_{2,t} \end{bmatrix} \tag{24}$$

donde v_1 y v_2 son los vectores propios asociados a λ_1 y λ_2, respectivamente. Además, a_1 y a_2 son constantes cuyos valores dependen de las condiciones iniciales del sistema.

2. Un ejemplo de sistema dinámico: El modelo de Richardson

- De acuerdo con la expresión anterior, para cualquier valor de a_1 y si $a_2 = 0$, tenemos que

$$\begin{bmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{bmatrix} = v_1(\lambda_1 + 1)^t a_1 + \begin{bmatrix} \bar{x}_{1,t} \\ \bar{x}_{2,t} \end{bmatrix} \tag{25}$$

con lo cual las variables tenderán hacia el punto estacionario, a medida que el tiempo aumenta puesto que el término $v_1(\lambda_1 + 1)^t a_1$ tenderá a cero. Estas serán las únicas trayectorias convergentes (para los distintos valores de a_1) al punto estacionario, y constituye la denominada senda estable, que es única.

2. Un ejemplo de sistema dinámico: El modelo de Richardson

- Por otra parte, considerando $a_1 = 0$ y cualquier valor de a_2 tenemos

$$\begin{bmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{bmatrix} = v_2(\lambda_2 + 1)^t a_2 + \begin{bmatrix} \bar{x}_{1,t} \\ \bar{x}_{2,t} \end{bmatrix} \tag{26}$$

que tiende a infinito a medida que el tiempo crece. En general, y siempre que $a_2 \neq 0$, las trayectorias solución del sistema se alejarán del punto estacionario.

2. Un ejemplo de sistema dinámico: El modelo de Richardson

- La senda estable: Con una solución de punto de silla, existe una única senda estable dada, en términos generales, por

$$\begin{bmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{bmatrix} = v_1(\lambda_1 + 1)^t a_1 + \begin{bmatrix} \bar{x}_{1,t} \\ \bar{x}_{2,t} \end{bmatrix} \tag{27}$$

siendo λ_1 el valor propio para el que el módulo de $\lambda_1 + 1$ es menor que 1, y v_1 un vector propio asociado al mismo.

- A partir de dicha expresión, tenemos que en el siguiente periodo, $t+1$, la solución del sistema puede definirse como:

$$\begin{bmatrix} x_{1,t+1} \\ x_{2,t+1} \end{bmatrix} = v_1(\lambda_1+1)(\lambda_1+1)^t a_1 + \begin{bmatrix} \bar{x}_{1,t} \\ \bar{x}_{2,t} \end{bmatrix} \tag{28}$$

con lo cual, restando ambas expresiones resulta,

$$\begin{bmatrix} \Delta x_{1,t} \\ \Delta x_{2,t} \end{bmatrix} = \lambda_1 v_1(\lambda_1+1)^t a_1 \tag{29}$$

siendo $\Delta x_{1,t} = x_{1,t+1} - x_{1,t}$, y $\Delta x_{2,t} = x_{2,t+1} - x_{2,t}$.

- Por otra parte, a partir de la expresión (27), obtenemos que:

$$v_1(\lambda_1 + 1)^t a_1 = \begin{bmatrix} x_{1,t} - \bar{x}_{1,t} \\ x_{2,t} - \bar{x}_{2,t} \end{bmatrix} \tag{30}$$

por lo que sustituyendo en la expresión (29), llegamos finalmente a:

$$\begin{bmatrix} \Delta x_{1,t} \\ \Delta x_{2,t} \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} x_{1,t} - \bar{x}_{1,t} \\ x_{2,t} - \bar{x}_{2,t} \end{bmatrix} \tag{31}$$

- Al valor propio λ_1 se le conoce como tasa de convergencia ya que representa la tasa a la que las trayectorias solución convergen hacia el estado estacionario sobre la senda estable.

2. Un ejemplo de sistema dinámico: El modelo de Richardson

Ajuste hacia la senda estable: Supongamos que la variable que se ajusta (variable saltarina) es la endógena 1. De la expresión (29), obtenemos que la senda estable viene definida por la siguiente trayectoria:

$$\Delta x_{1,t} = \lambda_1 (x_{1,t} - \bar{x}_{1,t}) \tag{32}$$

Por su parte, la ecuación dinámica del modelo para las variaciones de esta variable endógena es:

$$\Delta x_{1,t} = -\alpha x_{1,t} + \beta x_{2,t} + \theta z_{1,t} \tag{33}$$

El efecto a corto plazo de dicha perturbación sobre $\Delta x_{1,t}$ lo podemos cuantificar igualando ambas expresiones, tal que:

$$-\alpha x_{1,t} + \beta x_{2,t} + \theta z_{1,t} = \lambda_1 (x_{1,t} - \bar{x}_{1,t}) \tag{34}$$

y despejando $x_{1,1}$ resulta,

$$x_{1,t} = \frac{\beta}{\alpha + \lambda_1} x_{2,t} + \frac{\theta}{\alpha + \lambda_1} z_{1,t} + \frac{\lambda_1}{\alpha + \lambda_1} \bar{x}_{1,t} \tag{35}$$