Clase 18: Solución numérica del modelo de Ramsey

José L. Torres

Universidad de Málaga

Macroeconomía Avanzada

18. Solución numérica del modelo de Ramsey

Reglas de log-linearización:

1. Cada una de las variables pueden definirse como:

$$x_t \approx \overline{x}_t \exp(\widehat{x}_t) \approx \overline{x}_t(1+\widehat{x}_t) \tag{1}$$

2. Cuando dos variables estén multiplicando, entonces:

$$x_t z_t \approx \overline{x}_t(1+\widehat{x}_t)\overline{z}_t(1+\widehat{z}_t) \approx \overline{x}_t\overline{z}_t(1+\widehat{x}_t+\widehat{z}_t) \tag{2}$$

   esto, es, suponemos que el producto de dos desviaciones con respecto a sus estados estacionarios, $\widehat{x}_t\widehat{z}_t$, es un número muy pequeño y aproximadamente igual a cero.

3. La tercera regla hace referencia a las potencias, tal que:

$$x_t^a \approx \overline{x}_t^a(1+\widehat{x}_t)^a \approx \overline{x}_t^a(1+a\widehat{x}_t) \tag{3}$$

18. Solución numérica del modelo de Ramsey

Log-linearización de la función de producción:

$$y_t = Ak_t^{\alpha} \tag{4}$$

Aplicando las reglas de log-linearización resulta:

$$\overline{y}(1+\widehat{y}_t) = A\overline{k}^{\alpha}(1+\widehat{\alpha k}_t) \tag{5}$$

o equivalentemente:

$$\overline{y} + \overline{y}\widehat{y}_t = A\overline{k}^{\alpha} + \alpha A\overline{k}^{\alpha}\widehat{k}_t \tag{6}$$

18. Solución numérica del modelo de Ramsey

En estado estacionario tendríamos que $\overline{y} = A\overline{k}^{\alpha}$, por lo que resulta:

$$\overline{y}\widehat{y}_t = \alpha A\overline{k}^{\alpha}\widehat{k}_t \tag{7}$$

y operando, utilizando de nuevo la definición de estado estacionario, llegamos finalmente a:

$$\widehat{y}_t = \alpha\widehat{k}_t \tag{8}$$

donde $\widehat{y}_t = \ln Y_t - \ln \overline{Y}$.

18. Solución numérica del modelo de Ramsey

A continuación, procedemos a log-linearizar la ecuación dinámica para el stock de capital per cápita:

$$c_t + k_{t+1}(1+n) = (1-\delta)k_t + y_t \tag{9}$$

Aplicando las reglas de log-linearización resulta:

$$\overline{c}(1+\widehat{c}_t) + \overline{k}(1+n)(1+\widehat{k}_{t+1}) = (1-\delta)\overline{k}(1+\widehat{k}_t) + \overline{y}(1+\widehat{y}_t) \tag{10}$$

Utilizando la definición de estado estacionario:

$$\overline{c} + \overline{k}(1+n) = (1-\delta)\overline{k} + \overline{y} \tag{11}$$

y operando resulta:

$$\overline{c}\widehat{c}_t + \overline{k}(1+n)\widehat{k}_{t+1} = (1-\delta)\overline{k}\widehat{k}_t + \overline{y}\widehat{y}_t \tag{12}$$

18. Solución numérica del modelo de Ramsey

Reordenando términos:

$$\frac{\overline{c}}{\overline{k}}\widehat{c}_t + (1+n)\widehat{k}_{t+1} = (1-\delta)\widehat{k}_t + \frac{\overline{y}}{\overline{k}}\widehat{y}_t \tag{13}$$

Utilizando la definición de estado estacionario, resulta que:

$$\frac{\overline{c}}{\overline{k}} = \frac{A\left(\frac{1-\beta+\beta\delta}{\alpha A\beta}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} - (n+\delta)\left(\frac{1-\beta+\beta\delta}{\alpha A\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}}{\left(\frac{1-\beta+\beta\delta}{\alpha A\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}} \tag{14}$$

y

$$\frac{\overline{y}}{\overline{k}} = \left(\frac{1-\beta+\beta\delta}{\alpha\beta}\right) \tag{15}$$

18. Solución numérica del modelo de Ramsey

Sustituyendo los valores de estado estacionario obtenemos:

$$\left[\frac{1-\beta+\beta\delta}{\alpha\beta}-(n+\delta)\right]\widehat{c}_t+(1+n)\widehat{k}_{t+1}=(1-\delta)\widehat{k}_t+\left(\frac{1-\beta+\beta\delta}{\beta}\right)\widehat{k}_t \tag{16}$$

Operando:

$$\left[\frac{1-\beta+\beta\delta}{\alpha\beta}-(n+\delta)\right]\widehat{c}_t+(1+n)\widehat{k}_{t+1}=\frac{1}{\beta}\widehat{k}_t \tag{17}$$

Operando de nuevo:

$$(1+n)\widehat{k}_{t+1}=-\left[\frac{1-\beta+\beta\delta}{\alpha\beta}-(n+\delta)\right]\widehat{c}_t+\frac{1}{\beta}\widehat{k}_t \tag{18}$$

o equivalentemente

$$\widehat{k}_{t+1}=-\left[\frac{1-\beta+\beta\delta}{\alpha\beta(1+n)}-\frac{(\delta+n)}{(1+n)}\right]\widehat{c}_t+\frac{1}{\beta(1+n)}\widehat{k}_t \tag{19}$$

18. Solución numérica del modelo de Ramsey

Sumando y restando $\widehat{k}_t$ a dicha expresión, obtenemos:

$$\widehat{k}_{t+1} - \widehat{k}_t + \widehat{k}_t = -\left[\frac{1-\beta+\beta\delta-\alpha\beta(\delta+n)}{\alpha\beta(1+n)}\right]\widehat{c}_t + \frac{1}{\beta(1+n)}\widehat{k}_t \qquad (20)$$

y definiendo $\Delta\widehat{k}_t = \widehat{k}_{t+1} - \widehat{k}_t$, llegamos finalmente a la ecuación dinámica log-linearizada para el stock de capital per cápita:

$$\Delta\widehat{k}_t = -\left[\frac{1-\beta+\beta\delta-\alpha\beta(\delta+n)}{\alpha\beta(1+n)}\right]\widehat{c}_t + \left[\frac{1-\beta(1+n)}{\beta(1+n)}\right]\widehat{k}_t \qquad (21)$$

18. Solución numérica del modelo de Ramsey

Log-linearización de la ecuación dinámica del consumo per cápita:

$$c_{t+1} = \beta(\alpha A k_{t+1}^{\alpha-1} + 1 - \delta) c_t \tag{22}$$

Aplicando las anteriores reglas resulta que:

$$\overline{c}(1+\widehat{c}_{t+1}) = \beta(1-\delta)\overline{c}(1+\widehat{c}_t) + \beta\alpha A\overline{k}^{\alpha-1}\overline{c}(1+(\alpha-1)\widehat{k}_{t+1}+\widehat{c}_t) \tag{23}$$

Operando obtenemos:

$$\begin{aligned} \overline{c} + \overline{c}\widehat{c}_{t+1} &= \beta(1-\delta)\overline{c} + \beta(1-\delta)\overline{c}\widehat{c}_t + \beta\alpha A\overline{k}^{\alpha-1}\overline{c} \\ &\quad + \beta\alpha A\overline{k}^{\alpha-1}\overline{c}(\alpha-1)\widehat{k}_t + \beta\alpha A\overline{k}^{\alpha-1}\overline{c}\widehat{c}_t \end{aligned} \tag{24}$$

18. Solución numérica del modelo de Ramsey

Utilizando la definición de dicha ecuación en estado estacionario,

$$\overline{c} = \beta(1-\delta)\overline{c} + \beta\alpha A\overline{k}^{\alpha-1}\overline{c} \tag{25}$$

y operando, resulta:

$$\overline{c}\widehat{c}_{t+1} = \beta(1-\delta)\overline{c}\widehat{c}_t + \beta\alpha A\overline{k}^{\alpha-1}\overline{c}((\alpha-1)\widehat{k}_{t+1} + \widehat{c}_t) \tag{26}$$

o equivalentemente

$$\widehat{c}_{t+1} = \beta(1-\delta)\widehat{c}_t + \beta\alpha A\overline{k}^{\alpha-1}((\alpha-1)\widehat{k}_{t+1} + \widehat{c}_t) \tag{27}$$

y sustituyendo el valor de estado estacionario para el stock de capital per cápita resulta:

$$\widehat{c}_{t+1} = \beta(1-\delta)\widehat{c}_t + (1-\beta+\beta\delta)\left((\alpha-1)\widehat{k}_{t+1} + \widehat{c}_t\right) \tag{28}$$

y operando

$$\widehat{c}_{t+1} = \widehat{c}_t + (1-\beta+\beta\delta)\,(\alpha-1)\widehat{k}_{t+1} \tag{29}$$

18. Solución numérica del modelo de Ramsey

A partir de la expresión (19), obtenemos que

$$\widehat{k}_{t+1} = -\left[\frac{1-\beta+\beta\delta-\alpha\beta(\delta+n)}{\alpha\beta(1+n)}\right]\widehat{c}_t + \frac{1}{\beta(1+n)}\widehat{k}_t \tag{30}$$

y sustituyendo resulta

$$\widehat{c}_{t+1} = \widehat{c}_t + (1-\beta+\beta\delta)(\alpha-1)\left(\frac{1}{\beta(1+n)}\widehat{k}_t - \left[\frac{1-\beta+\beta\delta-\alpha\beta(\delta+n)}{\alpha\beta(1+n)}\right]\right. \tag{31}$$

Definiendo

$$\Omega = 1-\beta+\beta\delta$$

y

$$\Gamma = 1-\beta+\beta\delta-\alpha\beta(\delta+n)$$

resultando que:

$$\Delta\widehat{c}_t = \frac{(\alpha-1)\Omega}{\beta(1+n)}\widehat{k}_t - \frac{(\alpha-1)\Omega\Gamma}{\alpha\beta(1+n)}\widehat{c}_t \tag{32}$$

18. Solución numérica del modelo de Ramsey

Finalmente, la ecuación log-lineal para la inversión viene dada por:

$$i_t = y_t - c_t$$

por lo que aplicando las reglas de log-linearización resulta:

$$\bar{i}_t(1+\widehat{i}_t) = \bar{y}_t(1+\widehat{y}_t) - \bar{c}_t(1+\widehat{c}_t) \tag{33}$$

o equivalentemente

$$\bar{i}_t + \bar{i}_t\widehat{i}_t = \bar{y}_t + \bar{y}_t\widehat{y}_t - \bar{c}_t - \bar{c}_t\widehat{c}_t \tag{34}$$

18. Solución numérica del modelo de Ramsey

En estado estacionario resulta que:

$$\bar{i}_t = \bar{y}_t - \bar{c}_t \tag{35}$$

por lo que la expresión anterior podemos simplificarla a:

$$\bar{i}_t \hat{i}_t = \bar{y}_t \hat{y}_t - \bar{c}_t \hat{c}_t \tag{36}$$

y despejando las deviaciones de la inversión respecto a su valor de estado estacionario resulta:

$$\hat{i}_t = \frac{\bar{y}_t}{\bar{i}_t} \hat{y}_t - \frac{\bar{c}_t}{\bar{i}_t} \hat{c}_t \tag{37}$$

18. Solución numérica del modelo de Ramsey

Utilizando las definiciones de estado estacionario resulta que:

$$\frac{\overline{y}_t}{\overline{i}_t} = \frac{1-\beta+\beta\delta}{\alpha\beta(n+\delta)} \tag{38}$$

y

$$\frac{\overline{c}_t}{\overline{i}_t} = \frac{1-\beta+\beta\delta-\alpha\beta\delta}{\alpha\beta(n+\delta)} \tag{39}$$

Sustituyendo llegamos a que:

$$\widehat{i}_t = \frac{1-\beta+\beta\delta}{\alpha\beta(n+\delta)}\widehat{y}_t - \frac{1-\beta+\beta\delta-\alpha\beta(n+\delta)}{\alpha\beta(n+\delta)}\widehat{c}_t \tag{40}$$

18. Solución numérica del modelo de Ramsey

Sistema log-linearizado discreto: Para simplificar nuestro análisis vamos a agrupar parámetros tal que:

$$\Omega = 1 - \beta + \beta\delta \tag{41}$$

$$\Gamma = 1 - \beta + \beta\delta - \alpha\beta(\delta + n) \tag{42}$$

Por tanto, el sistema log-linearizado en términos de desviaciones respecto al estado estacionario queda, en notación matricial como:

$$\begin{bmatrix} \Delta\widehat{c}_t \\ \Delta\widehat{k}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{(\alpha-1)\Omega\Gamma}{\alpha\beta(1+n)} & \frac{(\alpha-1)\Omega}{\beta(1+n)} \\ -\frac{\Gamma}{\alpha\beta(1+n)} & \frac{1-\beta(1+n)}{\beta(1+n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{c}_t \\ \widehat{k}_t \end{bmatrix} \tag{43}$$

18. Solución numérica del modelo de Ramsey

Análisis de estabilidad:

$$Det \begin{bmatrix} -\frac{(\alpha-1)\Omega\Gamma}{\alpha\beta(1+n)} - \lambda & \frac{(\alpha-1)\Omega}{\beta(1+n)} \\ -\frac{\Gamma}{\alpha\beta(1+n)} & \frac{1-\beta(1+n)}{\beta(1+n)} - \lambda \end{bmatrix} = 0 \tag{44}$$

dando lugar a la siguiente ecuación de segundo grado:

$$\lambda^2 + \left[\frac{(\alpha-1)\Omega\Gamma}{\alpha\beta(1+n)} - \frac{1-\beta(1+n)}{\beta(1+n)}\right]\lambda + \tag{45}$$

$$\frac{(\alpha-1)\Omega\Gamma}{\alpha\beta(1+n)\beta(1+n)} - \left(\frac{1-\beta(1+n)}{\beta(1+n)}\right)\frac{(\alpha-1)\Omega\Gamma}{\alpha\beta(1+n)} = 0 \tag{46}$$

o equivalentemente

$$\lambda^2 + \frac{(\alpha-1)\Omega\Gamma - \alpha + \alpha\beta(1+n)}{\alpha\beta(1+n)}\lambda + \frac{(\alpha-1)\Omega\Gamma}{\alpha\beta(1+n)} = 0 \tag{47}$$

18. Solución numérica del modelo de Ramsey

Calculando sus raíces resulta:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\left[\frac{(\alpha-1)\Omega\Gamma-\alpha+\alpha\beta(1+n)}{\alpha\beta(1+n)}\right] \pm \sqrt{\left(\frac{(\alpha-1)\Omega\Gamma-\alpha+\alpha\beta(1+n)}{\alpha\beta(1+n)}\right)^2 - 4\frac{(\alpha-1)\Omega\Gamma}{\alpha\beta(1+n)}}}{2} \tag{48}$$

18. Solución numérica del modelo de Ramsey

Reajuste instantáneo en el nivel de consumo:
La ecuación dinámica obtenida anteriormente para el consumo es:

$$\Delta\widehat{c}_t = \frac{(\alpha-1)\Omega}{\beta(1+n)}\widehat{k}_t - \frac{(\alpha-1)\Omega\Gamma}{\alpha\beta(1+n)}\widehat{c}_t \tag{49}$$

Por otra parte, la senda estable viene definida por la trayectoria:

$$\Delta\widehat{c}_t = \lambda_1\widehat{c}_t \tag{50}$$

18. Solución numérica del modelo de Ramsey

Igualando ambas expresiones resulta:

$$\frac{(\alpha-1)\Omega}{\beta(1+n)}\widehat{k}_t - \frac{(\alpha-1)\Omega\Gamma}{\alpha\beta(1+n)}\widehat{c}_t = \lambda_1\widehat{c}_t \tag{51}$$

Despejando obtenemos que el nuevo valor de las desviaciones del consumo en el momento en el que se produce la perturbación viene dado por:

$$\widehat{c}_t = \frac{\alpha(\alpha-1)\Omega}{(\alpha-1)\Omega\Gamma + \alpha\beta(1+n)\lambda_1}\widehat{k}_t \tag{52}$$