Clase 17: El modelo de Ramsey

José L. Torres

Universidad de Málaga

Macroeconomía Avanzada

17. El modelo de Ramsey

- Modelo de crecimiento óptimo. Equilibrio como resultado de las decisiones de familias y empresas.
- Senda óptima de consumo. Ahorro endógeno.
- Maximización de beneficios de las empresas.

17. El modelo de Ramsey

- Tamaño de la población:

$$L_t = L_{t-1}(1+n) \tag{1}$$

donde $n > 0$ es la tasa de crecimiento de la población. En términos generales tendríamos:

$$L_t = L_0(1+n)^t \tag{2}$$

donde L_0 es la población en el momento inicial 0, que lo vamos a normalizar a 1 ($L_0 = 1$). Entonces resulta que:

$$L_t = (1+n)^t \tag{3}$$

- Definimos el consumo per cápita:

$$c_t = \frac{C_t}{L_t} \tag{4}$$

17. El modelo de Ramsey

- Función a maximizar:

$$\max_{\{c_t\}_{t=0}^{\infty}} E_t \sum_{t=0}^{T} \beta^t U(c_t) L_t \tag{5}$$

donde $\beta \in (0,1)$ es el factor de descuento, que definimos como,

$$\beta = \frac{1}{1+\theta} \tag{6}$$

siendo $\theta > 0$, la tasa de preferencia subjetiva intertemporal.

17. El modelo de Ramsey

- El problema, utilizando la expresión (3) lo podemos escribir como:

$$\max_{\{c_t\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{T} \beta^t (1+n)^t U(c_t) \tag{7}$$

Equivalentemente, utilizando la expresión (6), el problema a maximizar sería:

$$\max_{\{c_t\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{T} \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^t (1+n)^t U(c_t) \tag{8}$$

donde el factor de descuento vendría dado por la expresión:

$$\left(\frac{1+n}{1+\theta}\right)^t \tag{9}$$

- Cuando tenemos crecimiento de la población tenemos que imponer la siguiente condición: $\theta > n$.

17. El modelo de Ramsey

- Restricción presupuestaria:

$$C_t + I_t = W_t L_t + R_t K_t \tag{10}$$

siendo la ecuación de acumulación de capital:

$$K_{t+1} = (1 - \delta) K_t + I_t \tag{11}$$

Sustituyendo la ecuación de acumulación de capital en la restricción presupuestaria, ésta puede definirse como:

$$C_t + K_{t+1} = W_t L_t + (R_t + 1 - \delta) K_t \tag{12}$$

Ahora, procedemos a escribir la restricción presupuestaria en términos per cápita, donde:

$$k_t = \frac{K_t}{L_t} \tag{13}$$

17. El modelo de Ramsey

- Multiplicando y dividiendo la restricción presupuestaria (12) por la población resulta:

$$\frac{C_t}{L_t} + \frac{K_{t+1}}{L_t} = \frac{W_t L_t + (R_t + 1 - \delta) K_t}{L_t} \tag{14}$$

lo que supone que:

$$c_t + \frac{K_{t+1}}{L_t} = W_t + (R_t + 1 - \delta) k_t \tag{15}$$

17. El modelo de Ramsey

Estructura del modelo de Ramsey	
Función de utilidad de los consumidores	$U = U(C_t)$
Restricción presupuestaria	$C_t + I_t = W_t L_t + R_t K_t$
Stock de capital inicial	$K_0 > 0$
Ecuación de acumulación de capital	$K_{t+1} = (1-\delta) K_t + I_t$
Función de producción	$Y_t = A_t F(K_t, L_t)$
Tasa de crecimiento de la población	$L_t = L_{t-1}(1+n)$

17. El modelo de Ramsey

- Vamos a parametrizar las preferencias. Función de utilidad logarítmica:

$$U(c_t) = \ln c_t \tag{16}$$

El problema del consumidor consistiría en resolver el siguiente problema:

$$\max_{\{c_t\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{T} \left(\frac{1+n}{1+\theta}\right)^t \ln c_t \tag{17}$$

sujeta a:

$$c_t + (1+n)k_{t+1} = W_t + (R_t + 1 - \delta)k_t \tag{18}$$

dado un $k_0 > 0$.

17. El modelo de Ramsey

- La función auxiliar de Lagrange sería:

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{T} \left(\frac{1+n}{1+\theta}\right)^t \ln c_t \tag{19}$$

$$-\lambda_t \left[c_t + (1+n)k_{t+1} - W_t - (R_t + 1 - \delta)k_t\right] \tag{20}$$

Las condiciones de primer orden, para $t = 0, 1, 2, ..., T$, serían las siguientes:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t} : \left(\frac{1+n}{1+\theta}\right)^t \frac{1}{c_t} - \lambda_t = 0 \tag{21}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k_{t+1}} : \lambda_{t+1}(R_{t+1} + 1 - \delta) - \lambda_t(1+n) = 0 \tag{22}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_t} : c_t + k_{t+1} - W_t - \frac{(R_t + 1 - \delta)}{(1+n)} k_t = 0 \tag{23}$$

17. El modelo de Ramsey

- De la primera condición de primer orden obtenemos:

$$\lambda_t = \left(\frac{1+n}{1+\theta}\right)^t \frac{1}{c_t} \tag{24}$$

Sustituyendo el valor del multiplicador de Lagrange en t y en $t+1$, en la segunda condición de primer orden, resulta:

$$\left(\frac{1+n}{1+\theta}\right)^{t+1} \frac{1}{c_{t+1}}(R_{t+1}+1-\delta) = (1+n)\left(\frac{1+n}{1+\theta}\right)^t \frac{1}{c_t} \tag{25}$$

y simplificando:

$$\frac{1}{1+\theta}\frac{1}{c_{t+1}}(R_{t+1}+1-\delta) = \frac{1}{c_t} \tag{26}$$

17. El modelo de Ramsey

- Resultando en la siguiente ecuación dinámica para el consumo per cápita:

$$c_{t+1} = \frac{(R_{t+1} + 1 - \delta)}{1 + \theta} c_t \tag{27}$$

o equivalentemente:

$$c_{t+1} = \beta(R_{t+1} + 1 - \delta) c_t \tag{28}$$

17. El modelo de Ramsey

- En términos del consumo agregado, esta ecuación sería:

$$\frac{C_{t+1}}{L_{t+1}} = \beta(R_{t+1} + 1 - \delta)\frac{C_t}{L_t} \tag{29}$$

o equivalentemente,

$$C_{t+1} = \beta(R_{t+1} + 1 - \delta)(1 + n)C_t \tag{30}$$

17. El modelo de Ramsey

- La empresas maximizan beneficios sujetas a la restricción tecnológica:En términos generales la empresas maximizan los beneficios, Π_t, sujetas a la restricción tecnológica:

$$\max \Pi_t = Y_t - W_t L_t - R_t K_t \tag{31}$$

donde la función de producción es:

$$Y_t = A_t F(K_t, L_t) \tag{32}$$

17. El modelo de Ramsey

- El problema para las empresas en términos per cápita sería:

$$\max \pi_t = y_t - w_t - (R_t + \delta)k_t \tag{33}$$

- siendo la función de producción intesiva en capital:

$$y_t = A_t f(k_t) \tag{34}$$

- Ahora las empresas maximizarían respecto al stock de capital per cápita:

$$\frac{\partial \pi}{\partial k} = A_t f_k(k_t) - (R_t + \delta) = 0 \tag{35}$$

17. El modelo de Ramsey

- Por tanto obtenemos:

$$A_t f_k(k_t) = R_t + \delta \tag{36}$$

- El salario de equilibrio lo obtendríamos como:

$$w_t = A_t f(k_t) - k_t A_t f_k(k_t) \tag{37}$$

17. El modelo de Ramsey

- Función de producción Cobb-Douglas:

$$\max \pi_t = A_t k_t^{\alpha} - w_t - R_t k_t \tag{38}$$

Condición de primer orden:

$$\frac{\partial \pi}{\partial k} = \alpha A_t k_t^{\alpha-1} - R_t = 0 \tag{39}$$

De la expresión anterior obtenemos que la productividad marginal del capital per cápita es igual al tipo de interés real:

$$\alpha A_t k_t^{\alpha-1} = R_t \tag{40}$$

o lo que es lo mismo la retribución al capital es una proporción α de la producción:

$$R_t k_t = \alpha y_t \tag{41}$$

17. El modelo de Ramsey

- Dado que la maximización de beneficios la realizamos en términos per cápita, no disponemos de una condición de primer orden respecto al empleo. En este caso el salario de equilibrio lo obtendríamos como la diferencia entre lo que se produce y la parte de producción que va destinada a retribuir al stock de capital per cápita, tal y como lo hemos definido anteriormente, por lo que vendría dado por:

$$w_t = A_t k_t^{\alpha} - k_t \alpha A_t k_t^{\alpha-1} = A_t k_t^{\alpha} - \alpha A_t k_t^{\alpha} = (1-\alpha) y_t \qquad (42)$$

17. El modelo de Ramsey

- El equilibrio competitivo. Partimos de la ecuación dinámica para el consumo per cápita, que viene dada por la expresión:

$$c_{t+1} = \beta(R_{t+1} + 1 - \delta)c_t \tag{43}$$

Sustituyendo el valor de equilibrio para el tipo de interés resulta:

$$c_{t+1} = \beta(\alpha A_{t+1} k_{t+1}^{\alpha-1} + 1 - \delta)c_t \tag{44}$$

17. El modelo de Ramsey

- Por otra parte, la ecuación dinámica para el stock de capital per cápita la obtenemos a partir de la restricción presupuestaria del individuo. Sustituyendo los valores de equilibrio para el tipo de interés y el salario:

$$c_t + (1+n)k_{t+1} = A_t k_t^{\alpha} - \alpha A_t k_t^{\alpha} + (\alpha A_t k_t^{\alpha-1} + 1 - \delta)k_t \qquad (45)$$

y reordenando términos llegaríamos a:

$$c_t + (1+n)k_{t+1} = A_t k_t^{\alpha} + (1-\alpha)k_t \qquad (46)$$

17. El modelo de Ramsey

- Estado estacionario: Partiendo de la condición dinámica para el consumo per cápita, en estado estacionario obtenemos:

$$1 = \beta(\alpha A \overline{k}^{\alpha-1} + 1 - \delta) \tag{47}$$

de la cual obtenemos que el stock de capital per cápita en estado estacionario es:

$$\overline{k} = \left(\frac{1 - \beta + \beta\delta}{\alpha A \beta} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \tag{48}$$

17. El modelo de Ramsey

- A partir de la condición dinámica para el stock de capital per cápita en estado estacionario resulta:

$$\overline{c} + (1+n)\overline{k} = (1-\alpha)A\overline{k}^{\alpha} + \alpha A\overline{k}^{\alpha} + (1-\delta)\overline{k} \tag{49}$$

y operando resulta que:

$$\overline{c} = A\overline{k}^{\alpha} - (n+\delta)\overline{k} \tag{50}$$

Por lo que el consumo per cápita en estado estacionario vendría dado por:

$$\overline{c} = A\left(\frac{1-\beta+\beta\delta}{\alpha A\beta}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} - (n+\delta)\left(\frac{1-\beta+\beta\delta}{\alpha A\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \tag{51}$$