Clase 15: Resolución numérica del modelo de equilibrio general dinámico

José L. Torres

Universidad de Málaga

Macroeconomía Avanzada

15. Resolución numérica del modelo de equilibrio general dinámico

- Vamos a resolver numéricamante el modelo suponiendo que $L = 1$. En este caso la economía estaría compuesta por las siguientes siete ecuaciones:

$$C_{t+1} = \beta \left[R_{t+1} + 1 - \delta \right] C_t \tag{1}$$

$$R_t = \alpha \frac{Y_t}{K_t} = \frac{\alpha A_t K_t^{\alpha}}{K_t} = \alpha A_t K_t^{\alpha - 1} \tag{2}$$

$$W_t = (1 - \alpha) Y_t = (1 - \alpha) A_t K_t^{\alpha} \tag{3}$$

$$Y_t = A_t K_t^{\alpha} \tag{4}$$

$$K_{t+1} = (1 - \delta) K_t + I_t \tag{5}$$

$$C_t + I_t = Y_t \tag{6}$$

15. Resolución numérica del modelo de equilibrio general dinámico

- El sistema dinámico: A continuación, vamos a reducir el sistema anterior a un sistema de dos ecuaciones dinámicas, una para el consumo y otra para el stock de capital (más la determinación de la PTF). Sustituyendo la expresión para el tipo de interés (2) en la ecuación dinámica del consumo (1) obtenemos:

$$\frac{C_{t+1}}{C_t} = \beta \left[\alpha A_{t+1} K_{t+1}^{\alpha-1} + 1 - \delta \right] \tag{7}$$

15. Resolución numérica del modelo de equilibrio general dinámico

- Por otra parte, sustituyendo el precio relativo de los factores productivos en la restricción presupuestaria del individuo obtenemos:

$$C_t + K_{t+1} - K_t - (\alpha A_t K_t^{\alpha-1} - \delta)K_t - (1-\alpha)A_t K_t^{\alpha} = 0$$

o equivalentemente:

$$C_t + K_{t+1} - K_t - \alpha A_{t+1} K_t^{\alpha} + \delta K_t - A_t K_t^{\alpha} + \alpha A_t K_t^{\alpha} = 0$$

y operando llegamos finalmente a:

$$C_t + K_{t+1} - (1-\delta)K_t - A_t K_t^{\alpha} = 0 \tag{8}$$

expresión que nos indica el proceso de acumulación de capital a lo largo del tiempo, en la que el capital en el próximo periodo es igual a lo que se produce hoy, menos lo que se consume, más el capital de hoy menos su depreciación.

15. Resolución numérica del modelo de equilibrio general dinámico

- Por tanto, la solución competitiva viene determinada por dos ecuaciones en diferencias:

$$C_{t+1} = \beta \left[\alpha A_{t+1} K_{t+1}^{\alpha-1} + 1 - \delta \right] C_t \tag{9}$$

$$K_{t+1} = (1-\delta) K_t + A_t K_t^{\alpha} - C_t \tag{10}$$

15. Resolución numérica del modelo de equilibrio general dinámico

- Estado Estacionario: A continuación calculamos el estado estacionario. Para ello partimos de la ecuación que determina la senda óptima de consumo, que viene dada por:

$$C_{t+1} = \beta \left[R_{t+1} + 1 - \delta \right] C_t \tag{11}$$

Eliminando los subíndices de tiempo de la senda óptima de consumo obtenemos que:

$$1 = \beta(\overline{R} + 1 - \delta) \tag{12}$$

a partir de la cual obtenemos el valor de estado estacionario para el tipo de interés, tal que:

$$\overline{R} = \frac{1 - \beta + \beta\delta}{\beta} \tag{13}$$

15. Resolución numérica del modelo de equilibrio general dinámico

- Por otra parte, el tipo de interés real es igual a la productividad marginal del capital, por lo que la ecuación de la senda óptima de consumo en estado estacionario podemos también definirla como:

$$\overline{C} = \beta(\alpha \overline{AK}^{\alpha-1} + 1 - \delta)\overline{C} \tag{14}$$

Operando, resulta:

$$\beta(\alpha \frac{\overline{Y}}{\overline{K}} + 1 - \delta) = 1 \tag{15}$$

Despejando el estado estacionario del stock de capital como función del nivel de producción en estado estacionario, resulta:

$$\overline{K} = \frac{\alpha\beta}{1 - \beta + \beta\delta}\overline{Y} \tag{16}$$

15. Resolución numérica del modelo de equilibrio general dinámico

- De la ecuación de acumulación en estado estacionario obtenemos:

$$\overline{K} = (1-\delta)\overline{K} + \overline{I} \tag{17}$$

por lo que operando resulta:

$$\overline{I} = \delta\overline{K} \tag{18}$$

y utilizando la expresión (16) por lo que podemos escribir:

$$\overline{I} = \frac{\alpha\beta\delta}{1-\beta+\beta\delta}\overline{Y} \tag{19}$$

15. Resolución numérica del modelo de equilibrio general dinámico

- A su vez, de la restricción de factibilidad de la economía, obtenemos que en estado estacionario:

$$\overline{C} = \overline{Y} - \overline{I} = \frac{1 - \beta + \beta\delta - \alpha\beta\delta}{1 - \beta + \beta\delta}\overline{Y} \tag{20}$$

Finalmente, el nivel de producción en estado estacionario viene dado por:

$$\overline{Y} = \overline{AK}^{\alpha} \tag{21}$$

por lo que utilizando la expresión (16) obtenemos:

$$\overline{Y} = \overline{AK}^{\alpha} = \overline{A}^{\frac{1}{1-\alpha}} \left[\frac{\alpha\beta}{(1 - \beta + \beta\delta)} \right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \tag{22}$$

15. Resolución numérica del modelo de equilibrio general dinámico

- Una vez, obtenido el valor de la producción en estado estacionario, ahora podemos sustituir en las expresiones anteriores y obtener los valores de estado estacionario para las restantes variables. Así, si sustituimos la expresión (22) en (16), resulta que el valor del stock de capital en estado estacionario viene dado por:

$$\overline{K} = \frac{\alpha\beta}{1-\beta+\beta\delta}\overline{A}^{\frac{1}{1-\alpha}}\left[\frac{\alpha\beta}{(1-\beta+\beta\delta)}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = \left(\frac{(1-\beta+\beta\delta)}{\alpha\overline{A}\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \tag{23}$$

Alternativamente, el stock de capital en estado estacionario lo podemos calcular como:

$$\overline{R} = \frac{1}{\beta} - 1 + \delta = \frac{1-\beta+\delta\beta}{\beta} \tag{24}$$

15. Resolución numérica del modelo de equilibrio general dinámico

- Por otra parte de la condición de primer orden de la empresa respecto al stock de capital tenemos que:

$$\alpha \overline{AK}^{\alpha-1} = \overline{R} = \frac{1-\beta+\delta\beta}{\beta} \tag{25}$$

Despejando el stock de capital de estado estacionario resulta:

$$\overline{K} = \left(\frac{1-\beta+\delta\beta}{\alpha\overline{A}\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \tag{26}$$

15. Resolución numérica del modelo de equilibrio general dinámico

- Reglas de log-linearización:

1. Cada una de las variables pueden definirse como:

$$x_t \approx \overline{x}_t \exp(\widehat{x}_t) \approx \overline{x}_t(1+\widehat{x}_t) \tag{27}$$

2. Cuando dos variables estén multiplicando, entonces:

$$x_t z_t \approx \overline{x}_t(1+\widehat{x}_t)\overline{z}_t(1+\widehat{z}_t) \approx \overline{x}_t\overline{z}_t(1+\widehat{x}_t+\widehat{z}_t) \tag{28}$$

esto, es, suponemos que el producto de dos desviaciones con respecto a sus estados estacionarios, $\widehat{x}_t\widehat{z}_t$, es un número muy pequeño y aproximadamente igual a cero.

3. La tercera regla hace referencia a las potencias, tal que:

$$x_t^a \approx \overline{x}_t^a(1+\widehat{x}_t)^a \approx \overline{x}_t^a(1+a\widehat{x}_t) \tag{29}$$

15. Resolución numérica del modelo de equilibrio general dinámico

- Log-linearización de la función de producción:

$$Y_t = A_t K_t^{\alpha} \tag{30}$$

Aplicando la primera de las reglas descritas anteriormente al lado izquierdo de la función de producción, resulta que:

$$Y_t \approx \overline{Y}(1 + \widehat{y}_t) \tag{31}$$

Por su parte, aplicando la tercera regla al lado derecho de la función de producción, resulta que:

$$A_t K_t^{\alpha} \approx \overline{AK}^{\alpha}(1 + \widehat{k}_t)^{\alpha} \approx \overline{AK}^{\alpha}(1 + \alpha \widehat{k}_t) \tag{32}$$

15. Resolución numérica del modelo de equilibrio general dinámico

Por tanto, la ecuación log-linearizada para el nivel de producción es:

$$\overline{Y}(1+\widehat{y}_t) = \overline{AK}^{\alpha}(1+\alpha\widehat{k}_t) \tag{33}$$

y operando:

$$\overline{Y} + \overline{Y}\widehat{y}_t = \overline{AK}^{\alpha} + \overline{AK}^{\alpha}\alpha\widehat{k}_t \tag{34}$$

Utilizando la función de producción en estado estacionario y cancelando términos, resulta:

$$\overline{Y}\widehat{y}_t = \overline{AK}^{\alpha}\alpha\widehat{k}_t \tag{35}$$

Por lo que resulta que la aproximación lineal a la función de producción no lineal (en términos de desviaciones respecto al estado estacionario) viene dada por:

$$\widehat{y}_t = \alpha\widehat{k}_t \tag{36}$$

15. Resolución numérica del modelo de equilibrio general dinámico

- Log-linearización de la ecuación dinámica para el stock de capital:

$$C_t + K_{t+1} - (1-\delta)K_t = Y_t \tag{37}$$

Aplicando las reglas descritas anteriormente obtenemos:

$$\overline{C}(1+\widehat{c}_t) + \overline{K}(1+\widehat{k}_{t+1}) - (1-\delta)\overline{K}(1+\widehat{k}_t) = \overline{Y}(1+\widehat{y}_t) \tag{38}$$

Por su parte, esta ecuación en estado estacionario viene dada por:

$$\overline{C} + \overline{K} - (1-\delta)\overline{K} = \overline{Y} \tag{39}$$

Operando, resulta que,

$$\overline{C}\widehat{c}_t + \overline{K}\widehat{k}_{t+1} - (1-\delta)\overline{K}\widehat{k}_t = \overline{Y}\widehat{y}_t \tag{40}$$

resultando:

$$\frac{\overline{C}}{\overline{K}}\widehat{c}_t + \widehat{k}_{t+1} - (1-\delta)\widehat{k}_t = \frac{\overline{Y}}{\overline{K}}\widehat{y}_t \tag{41}$$

15. Resolución numérica del modelo de equilibrio general dinámico

Para continuar con la linearización, necesitamos obtener el valor de las ratios de estado estacionario que aparecen en la expresión anterior. Estas ratios de estado estacionario son:

$$\frac{\overline{C}}{\overline{K}} = \frac{\frac{1-\beta+\beta\delta-\alpha\beta\delta}{(1-\beta+\beta\delta)}\overline{Y}}{\frac{\alpha\beta}{(1-\beta+\beta\delta)}\overline{Y}} = \frac{1-\beta+\beta\delta-\alpha\beta\delta}{\alpha\beta}$$

$$\frac{\overline{Y}}{\overline{K}} = \frac{\overline{Y}}{\frac{\alpha\beta}{(1-\beta+\beta\delta)}\overline{Y}} = \frac{(1-\beta+\beta\delta)}{\alpha\beta}$$

Sustituyendo las ratios de estado estacionario resulta:

$$\frac{1-\beta+\beta\delta-\alpha\beta\delta}{\alpha\beta}\widehat{c}_t + \widehat{k}_{t+1} - (1-\delta)\widehat{k}_t = \frac{(1-\beta+\beta\delta)}{\alpha\beta}\widehat{y}_t \qquad (42)$$

15. Resolución numérica del modelo de equilibrio general dinámico

Sustituyendo la desviación del nivel de producción respecto a su valor de estado estacionario obtenida anteriormente ($\widehat{y}_t = \alpha \widehat{k}_t$) resulta:

$$\frac{1-\beta+\beta\delta-\alpha\beta\delta}{\alpha\beta}\widehat{c}_t + \widehat{k}_{t+1} = (1-\delta)\widehat{k}_t + \frac{(1-\beta+\beta\delta)}{\beta}\widehat{k}_t \tag{43}$$

Finalmente, definiendo $\Delta\widehat{k}_t = \widehat{k}_{t+1} - \widehat{k}_t$, llegamos a la siguiente ecuacion en diferencias para el stock de capital:

$$\Delta\widehat{k}_t = -\left[\frac{1-\beta+\beta\delta-\alpha\beta\delta}{\alpha\beta}\right]\widehat{c}_t + \left[\frac{1-\beta}{\beta}\right]\widehat{k}_t \tag{44}$$

15. Resolución numérica del modelo de equilibrio general dinámico

Log-linearización de la ecuación dinámica del consumo:

$$\frac{C_{t+1}}{C_t} = \beta \left(\alpha \frac{Y_{t+1}}{K_{t+1}} + 1 - \delta \right) \tag{45}$$

Aplicando las reglas descritas anteriormente obtenemos:

$$\frac{\overline{C}}{\overline{C}}(1 + \widehat{c}_{t+1} - \widehat{c}_t) = \alpha\beta \frac{\overline{Y}}{\overline{K}}(1 + \widehat{y}_{t+1} - \widehat{k}_{t+1}) + \beta(1 - \delta) \tag{46}$$

15. Resolución numérica del modelo de equilibrio general dinámico

Operando resulta que,

$$1 + \widehat{c}_{t+1} - \widehat{c}_t = \alpha\beta\frac{\overline{Y}}{\overline{K}}(\widehat{y}_{t+1} - \widehat{k}_{t+1}) + \alpha\beta\frac{\overline{Y}}{\overline{K}} + \beta(1-\delta) \tag{47}$$

A partir de la definición de estado estacionario obtenemos que:

$$\frac{\overline{Y}}{\overline{K}} = \frac{1-\beta+\beta\delta}{\alpha\beta} \tag{48}$$

Sustituyendo la expresión anterior, resulta que:

$$1 + \widehat{c}_{t+1} - \widehat{c}_t = (1-\beta+\beta\delta)(\widehat{y}_{t+1} - \widehat{k}_{t+1}) + (1-\beta+\beta\delta) + \beta(1-\delta) \tag{49}$$

y operando resulta:

$$\widehat{c}_{t+1} - \widehat{c}_t = (1-\beta+\beta\delta)(\widehat{y}_{t+1} - \widehat{k}_{t+1}) \tag{50}$$

15. Resolución numérica del modelo de equilibrio general dinámico

Utilizando la aproximación lineal para el nivel de producción obtenida anteriormente ($\widehat{y}_{t+1} = \alpha \widehat{k}_{t+1}$) y sustituyendo, obtenemos:

$$\widehat{c}_{t+1} - \widehat{c}_t = (1 - \beta + \beta\delta)(\alpha - 1)\widehat{k}_{t+1} \tag{51}$$

Por otra parte, a partir de la expresión (43) obtenida anteriormente resulta que:

$$\widehat{k}_{t+1} = \frac{1}{\beta}\widehat{k}_t - \frac{1 - \beta + \beta\delta - \alpha\beta\delta}{\alpha\beta}\widehat{c}_t \tag{52}$$

15. Resolución numérica del modelo de equilibrio general dinámico

Sustituyendo en la expresión anterior obtenemos que:

$$\widehat{c}_{t+1} - \widehat{c}_t = (1 - \beta + \beta\delta)(\alpha - 1)\left(\frac{1}{\beta}\widehat{k}_t - \frac{1 - \beta + \beta\delta - \alpha\beta\delta}{\alpha\beta}\widehat{c}_t\right) \quad (53)$$

Definiendo $\Delta\widehat{c}_t = \widehat{c}_{t+1} - \widehat{c}_t$, podemos escribirla como:

$$\Delta\widehat{c}_t = \frac{(1 - \beta + \beta\delta)(\alpha - 1)}{\beta}\widehat{k}_t - \frac{(1 - \beta + \beta\delta)(\alpha - 1)(1 - \beta + \beta\delta - \alpha\beta\delta)}{\alpha\beta}\widehat{c}_t \quad (54)$$

donde las variaciones en el consumo dependen negativamente de las desviaciones del stock de capital respecto a su estado estacionario (el coeficiente que multiplica a las desviaciones del stock de capital es negativo) y positivamente de las desviaciones del consumo respecto al estado estacionario (dado que el coeficiente asociado es positivo).

15. Resolución numérica del modelo de equilibrio general dinámico

Log-linearización de la ecuación de inversión:

$$I_t = Y_t - C_t \tag{55}$$

por lo que aplicando las reglas de log-linearización resulta:

$$\overline{I}_t(1+\widehat{i}_t) = \overline{Y}(1+\widehat{y}_t) - \overline{C}(1+\widehat{c}_t) \tag{56}$$

o equivalentemente,

$$\overline{I} + \overline{I}\widehat{i}_t = \overline{Y} + \overline{Y}\widehat{y}_t - \overline{C} - \overline{C}\widehat{c}_t \tag{57}$$

15. Resolución numérica del modelo de equilibrio general dinámico

En estado estacionario resulta que:

$$\overline{I} = \overline{Y} - \overline{C}_t \tag{58}$$

por lo que la expresión anterior podemos simplificarla a:

$$\overline{I}\widehat{i}_t = \overline{Y}\widehat{y}_t - \overline{C}\widehat{c}_t \tag{59}$$

y despejando las deviaciones de la inversión respecto a su valor de estado estacionario resulta:

$$\widehat{i}_t = \frac{\overline{Y}}{\overline{I}}\widehat{y}_t - \frac{\overline{C}}{\overline{I}}\widehat{c}_t \tag{60}$$

15. Resolución numérica del modelo de equilibrio general dinámico

Utilizando las definiciones de estado estacionario resulta que:

$$\frac{\overline{Y}}{\overline{I}} = \frac{1-\beta+\beta\delta}{\alpha\beta\delta}$$

y:

$$\frac{\overline{C}}{\overline{I}} = \frac{1-\beta+\beta\delta-\alpha\beta\delta}{\alpha\beta\delta}$$

Sustituyendo llegamos a que:

$$\widehat{i}_t = \frac{1-\beta+\beta\delta}{\alpha\beta\delta}\widehat{y}_t - \frac{1-\beta+\beta\delta-\alpha\beta\delta}{\alpha\beta\delta}\widehat{c}_t \tag{61}$$

15. Resolución numérica del modelo de equilibrio general dinámico

Sistema log-linearizado discreto. Para simplificar nuestro análisis vamos a agrupar parámetros tal que:

$$\Omega = 1 - \beta + \beta\delta \tag{62}$$

$$\Phi = 1 - \beta + (1 - \alpha)\beta\delta \tag{63}$$

Por tanto, el sistema log-linearizado en términos de desviaciones respecto al estado estacionario queda, en notación matricial como:

$$\begin{bmatrix} \Delta\widehat{c}_t \\ \Delta\widehat{k}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{(\alpha-1)\Omega\Phi}{\alpha\beta} & \frac{(\alpha-1)\Omega}{\beta} \\ -\frac{\Phi}{\alpha\beta} & \frac{(1-\beta)}{\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{c}_t \\ \widehat{k}_t \end{bmatrix} \tag{64}$$

15. Resolución numérica del modelo de equilibrio general dinámico

Análisis de estabilidad. Para ello calculamos:

$$Det \begin{bmatrix} -\frac{(\alpha-1)\Omega\Phi}{\alpha\beta} - \lambda & \frac{(\alpha-1)\Omega}{\beta} \\ -\frac{\Phi}{\alpha\beta} & \frac{1-\beta}{\beta} - \lambda \end{bmatrix} = 0 \tag{65}$$

A partir del sistema anterior obtenemos la siguiente ecuación de segundo grado:

$$\lambda^2 + \left(\frac{(\alpha-1)\Omega\Phi}{\alpha\beta} - \frac{1-\beta}{\beta}\right)\lambda - \left(\frac{1-\beta}{\beta}\right)\left(\frac{(\alpha-1)\Omega\Phi}{\alpha\beta}\right) + \left(\frac{(\alpha-1)\Omega}{\beta}\right) \tag{66}$$

o equivalentemente:

$$\lambda^2 + \frac{(\alpha-1)\Omega\Phi - \alpha(1-\beta)}{\alpha\beta}\lambda + \frac{(\alpha-1)\Omega\Phi}{\alpha\beta} = 0 \tag{67}$$

15. Resolución numérica del modelo de equilibrio general dinámico

Resolviendo obtenemos las siguientes raíces:

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{-\frac{(\alpha-1)\Omega\Phi-\alpha(1-\beta)}{\alpha\beta} \pm \sqrt{\left(\frac{(\alpha-1)\Omega\Phi-\alpha(1-\beta)}{\alpha\beta}\right)^2 - 4\frac{(\alpha-1)\Omega\Phi}{\alpha\beta}}}{2} \tag{68}$$

siendo una raíz positiva y la otra negativa.

15. Resolución numérica del modelo de equilibrio general dinámico

Senda estable: Una vez hemos calculado los valores propios, definiendo λ_1 como el valor propio que cumple que $|\lambda_1 + 1| < 1$, el sistema puede escribirse como:

$$\begin{bmatrix} \Delta\widehat{c}_t \\ \Delta\widehat{k}_t \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} \widehat{c}_t \\ \widehat{k}_t \end{bmatrix} \tag{69}$$

a partir del cual obtenemos las trayectorias matemáticas para ambas variables que nos llevan al estado estacionario.

15. Resolución numérica del modelo de equilibrio general dinámico

Reajuste instantáneo en el nivel de consumo:
La ecuación dinámica obtenida anteriormente para el consumo es:

$$\Delta\widehat{c}_t = -\frac{(\alpha-1)\Omega\Phi}{\alpha\beta}\widehat{c}_t + \frac{(\alpha-1)\Omega}{\beta}\widehat{k}_t \tag{70}$$

Por otra parte, la senda estable viene definida por la trayectoria:

$$\Delta\widehat{c}_t = \lambda_1\widehat{c}_t \tag{71}$$

15. Resolución numérica del modelo de equilibrio general dinámico

Igualando ambas expresiones resulta:

$$-\frac{(\alpha-1)\Omega\Phi}{\alpha\beta}\widehat{c}_t+\frac{(\alpha-1)\Omega}{\beta}\widehat{k}_t=\lambda_1\widehat{c}_t \tag{72}$$

Despejando, obtenemos el valor que tiene que tomar el consumo (en términos de desviaciones respecto al estado estacionario) para que esté situado en la senda estable viene dado por:

$$\widehat{c}_t=\frac{\alpha(\alpha-1)\Omega}{(\alpha-1)\Omega\Phi+\alpha\beta\lambda_1}\widehat{k}_t \tag{73}$$

expresión que es equivalente a la variación que tiene que experimentar en el momento de la perturbación, dado que la desviación inicial es nula (estado estacionario).