Clase 12: Resolución numérica de la Q de Tobin

José L. Torres

Universidad de Málaga

Macroeconomía Avanzada

12. La Q de Tobin: Resolución numérica

- Modelo de la Q de Tobin:

$$\Delta K_t = (q_t - 1)\frac{K_t}{\phi} \tag{1}$$

$$\Delta q_t = \frac{(R_t + \delta)q_t - \alpha K_{t+1}^{\alpha-1} + \frac{\phi}{2}\left(\frac{I_{t+1}-\delta K_{t+1}}{K_{t+1}}\right)^2 - \phi\left(\frac{I_{t+1}-\delta K_{t+1}}{K_{t+1}}\right)\frac{I_{t+1}}{K_{t+1}}}{(1-\delta)} \tag{2}$$

donde hemos definido $\Delta q_t = q_{t+1} - q_t$, y donde $\Delta K_t = K_{t+1} - K_t$.

12. La Q de Tobin: Resolución numérica

- Calibración del modelo.
- Dadas estas formas funcionales para la función de producción y para la función de costes de ajuste, los parámetros que vamos a usar son los siguientes: α, que es el parámetro tecnológico que determina la elasticidad del nivel de producción respecto al stock de capital suponemos que vale 0,35. La tasa de depreciación física del capital suponemos que es de un 6 por ciento anual ($\delta = 0,06$). El parámetro de costes de ajuste suponemos que toma un valor de 10, ($\phi = 10$). Finalmente el modelo cuenta con una variable que hemos supuesto exógena, el tipo de interés real. Vamos a suponer que $R_t = 0,04$, es decir un 4% anual.

Calibración de los parámetros

Símbolo	*Definición*	*Valor*
α	Elasticidad producción-capital	0,35
δ	Tasa de depreciación	0,06
ϕ	Parámetro costes de ajuste	10,0

12. La Q de Tobin: Resolución numérica

- Sistema de ecuaciones no lineales. Para resolver dicho sistema tenemos que obtener una aproximación lineal al sistema.
- Para obtener la log-linearización de nuestro sistema de ecuaciones, vamos a expresar las variables del modelo como la desviación log-lineal respecto a sus valores de estado estacionario. La desviación log-lineal de una variable, x_t, con respecto a su valor de estado estacionario, $\overline{x}_t$, la vamos a definir como $\widehat{x}_t$, donde $\widehat{x}_t = \ln x_t - \ln \overline{x}_t$. Para construir las ecuaciones en forma log-lineal, vamos a seguir tres reglas básicas.

12. La Q de Tobin: Resolución numérica

- Reglas de log-linearización:

1. Cada una de las variables pueden definirse como:

$$x_t \approx \overline{x}_t \exp(\widehat{x}_t) \approx \overline{x}_t(1+\widehat{x}_t) \tag{3}$$

2. Cuando dos variables estén multiplicando, entonces:

$$x_t z_t \approx \overline{x}_t(1+\widehat{x}_t)\overline{z}_t(1+\widehat{z}_t) \approx \overline{x}_t\overline{z}_t(1+\widehat{x}_t+\widehat{z}_t) \tag{4}$$

esto, es, suponemos que el producto de dos desviaciones con respecto a sus estados estacionarios, $\widehat{x}_t\widehat{z}_t$, es un número muy pequeño y aproximadamente igual a cero.

3. La tercera regla hace referente a las potencias, tal que:

$$x_t^a \approx \overline{x}_t^a(1+\widehat{x}_t)^a \approx \overline{x}_t^a(1+a\widehat{x}_t) \tag{5}$$

12. La Q de Tobin: Resolución numérica

- Log-linearización de la ecuación dinámica para el stock de capital.
- Escribimos de nuevo la ecuación de partida:

$$K_{t+1} - K_t = (q_t - 1)\frac{K_t}{\phi} \tag{6}$$

o equivalentemente:

$$K_{t+1} - K_t = q_t\frac{K_t}{\phi} - \frac{K_t}{\phi} \tag{7}$$

- Aplicando la regla de log-linearización (reglas 1 y 2) obtenemos:

$$\overline{K}_{t+1}(1+\widehat{k}_{t+1}) - \overline{K}_t(1+\widehat{k}_t) = \frac{1}{\phi}\overline{q}_t\overline{K}_t(1+\widehat{q}_t+\widehat{k}_t) - \frac{1}{\phi}\overline{K}_t(1+\widehat{k}_t) \tag{8}$$

12. La Q de Tobin: Resolución numérica

- Equivalentemente, eliminando los subíndices de tiempo para las variables en estado estacionario (dado que $\overline{K}_{t+1} = \overline{K}_t = \overline{K}$),

$$\overline{K} + \overline{K}\widehat{k}_{t+1} - \overline{K} - \overline{K}\widehat{k}_t = \frac{1}{\phi}\overline{q}\overline{K} + \frac{1}{\phi}\overline{q}\overline{K}\widehat{q}_t + \frac{1}{\phi}\overline{q}\overline{K}\widehat{k}_t - \frac{1}{\phi}\overline{K} - \frac{1}{\phi}\overline{K}\widehat{k}_t \tag{9}$$

y simplificando y dado que $\overline{q}_t = 1$, resulta que:

$$\widehat{k}_{t+1} - \widehat{k}_t = \frac{1}{\phi} + \frac{1}{\phi}\widehat{q}_t + \frac{1}{\phi}\widehat{k}_t - \frac{1}{\phi} - \frac{1}{\phi}\widehat{k}_t \tag{10}$$

o equivalentemente:

$$\widehat{k}_{t+1} - \widehat{k}_t = \frac{1}{\phi}\widehat{q}_t \tag{11}$$

por lo que finalmente obtenemos la siguiente aproximación lineal a las variaciones en el stock de capital (en términos de sus desviaciones respecto a su estado estacionario):

$$\Delta\widehat{k}_t = \frac{1}{\phi}\widehat{q}_t \tag{12}$$

12. La Q de Tobin: Resolución numérica

- Log-linearización de la ecuación dinámica para la ratio q.
- A continuación, procedemos a aplicar el mismo procedimiento a la segunda ecuación dinámica del modelo. Esta ecuación dinámica la podemos escribir como:

$$(1-\delta)q_{t+1} = (1+R_t)q_t - \alpha K_{t+1}^{\alpha-1} + \frac{\phi}{2}\left(\frac{I_{t+1}}{K_{t+1}} - \delta\right)^2 - \phi\left(\frac{I_{t+1}}{K_{t+1}} - \delta\right) \tag{13}$$

En estado estacionario, dicha expresión sería:

$$(1-\delta)\overline{q} = (1+\overline{R})\overline{q} - \alpha\overline{K}_t^{\alpha-1} \tag{14}$$

dado que en estado estacionario $\overline{I}_t = \delta\overline{K}_t$. Por su parte, la ratio inversión respecto al stock de capital viene dada por:

$$\frac{I_t}{K_t} = \frac{1}{\phi}(q_t - 1) + \delta \tag{15}$$

12. La Q de Tobin: Resolución numérica

- Sustituyendo esta expresión en la ecuación dinámica (13), resulta:

$$(1-\delta)q_{t+1} = (1+R_t)q_t - \alpha K_{t+1}^{\alpha-1} + \frac{\phi}{2}\left(\frac{1}{\phi}(q_{t+1}-1)\right)^2 \quad (16)$$

$$-\phi\left(\frac{1}{\phi}(q_{t+1}-1)\right)\left(\frac{1}{\phi}(q_{t+1}-1)+\delta\right) \quad (17)$$

Operando y simplificando, llegamos a:

$$(1-\delta)q_{t+1} = (1+R_t)q_t - \alpha K_{t+1}^{\alpha-1} - \frac{1}{2\phi}(q_{t+1}-1)^2 - \delta(q_{t+1}-1) \quad (18)$$

12. La Q de Tobin: Resolución numérica

- Aplicando las reglas de log-linearización a la expresión anterior, resulta:

$$
\begin{aligned}
(1-\delta)\overline{q}(1+\widehat{q}_{t+1}) &= (1+R)\overline{q}(1+\widehat{q}_t) - \alpha\overline{K}^{\alpha-1}(1+(\alpha-1)\widehat{k}_{t+1}) \\
&\quad -\frac{1}{2\phi}\overline{q}^2(1+2\widehat{q}_{t+1}) - \frac{1}{2\phi} + \frac{1}{\phi}\overline{q}(1+\widehat{q}_{t+1}) \\
&\quad -\delta\overline{q}(1+\widehat{q}_{t+1}) + \delta \qquad (19)
\end{aligned}
$$

12. La Q de Tobin: Resolución numérica

- Dado que el valor en estado estacionario de la ratio q es igual a 1, ($\overline{q} = 1$), podemos escribir:

$$\begin{aligned}(1-\delta)(1+\widehat{q}_{t+1}) &= (1+R)(1+\widehat{q}_t) - \alpha\overline{K}^{\alpha-1}(1+(\alpha-1)\widehat{k}_{t+1}) \\ &\quad -\frac{1}{2\phi}(1+2\widehat{q}_{t+1}) - \frac{1}{2\phi} + \frac{1}{\phi}(1+\widehat{q}_{t+1}) \\ &\quad -\delta(1+\widehat{q}_{t+1}) + \delta \qquad (20)\end{aligned}$$

y operando:

$$\begin{aligned}1+\widehat{q}_{t+1} - \delta - \delta\widehat{q}_{t+1} &= (1+\widehat{q}_t + R_t + R_t\widehat{q}_t) \qquad (21) \\ &\quad -\alpha\overline{K}^{\alpha-1}(1+(\alpha-1)\widehat{k}_{t+1}) - \delta\widehat{q}_{t+1} \qquad (22)\end{aligned}$$

o equivalentemente,

$$(1-\delta) + \widehat{q}_{t+1} = (1+R_t) + (1+R_t)\widehat{q}_t - \alpha\overline{K}^{\alpha-1} - \alpha\overline{K}^{\alpha-1}(\alpha-1)\widehat{k}_{t+1} \qquad (23)$$

12. La Q de Tobin: Resolución numérica

- Usando la expresión de estado estacionaro (14) y cancelando términos llegamos a:

$$\widehat{q}_{t+1} = (1 + R_t)\widehat{q}_t - \alpha \overline{K}^{\alpha-1}(\alpha - 1)\widehat{k}_{t+1} \tag{24}$$

y utilizando la definición del stock de capital en estado estacionario y reajustando términos, tenemos:

$$\widehat{q}_{t+1} = (1 + R_t)\widehat{q}_t - (\alpha - 1)(R_t + \delta)\widehat{k}_{t+1} \tag{25}$$

12. La Q de Tobin: Resolución numérica

- Por otra parte, a partir de la expresión (11) obtenemos que:

$$\widehat{k}_{t+1} = \widehat{k}_t + \frac{1}{\phi}\widehat{q}_t \tag{26}$$

y sustituyendo en la anterior expresión resulta:

$$\widehat{q}_{t+1} = (1+R_t)\widehat{q}_t - (\alpha-1)(R_t+\delta)\left(\widehat{k}_t + \frac{1}{\phi}\widehat{q}_t\right) \tag{27}$$

- Dado que estamos interesados en obtener una expresión en términos de las variaciones en $\widehat{q}_t$, que definimos como $\Delta\widehat{q}_t = \widehat{q}_{t+1} - \widehat{q}_t$, operando obtendríamos:

$$\Delta\widehat{q}_t = \frac{R_t\phi - (\alpha-1)(R_t+\delta)}{\phi}\widehat{q}_t - (\alpha-1)(R_t+\delta)\widehat{k}_t \tag{28}$$

12. La Q de Tobin: Resolución numérica

- Por tanto, en notación matricial el modelo de la Q de Tobin (log)linearizado en términos de desviaciones respecto al estado estacionario lo podemos definir a través del siguiente sistema dinámico:

$$\begin{bmatrix} \Delta\widehat{q}_t \\ \Delta\widehat{k}_t \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{R_t\phi-(\alpha-1)(R_t+\delta)}{\phi} & -(\alpha-1)(R_t+\delta) \\ \frac{1}{\phi} & 0 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} \widehat{q}_t \\ \widehat{k}_t \end{bmatrix} \tag{29}$$

12. La Q de Tobin: Resolución numérica

- Estabilidad del sistema:

$$Det \begin{bmatrix} \frac{R_t\phi-(\alpha-1)(R_t+\delta)}{\phi} - \lambda & -(\alpha-1)(R_t+\delta) \\ \frac{1}{\phi} & 0-\lambda \end{bmatrix} = 0 \qquad (30)$$

La ecuación de segundo grado correspondiente sería:

$$\lambda^2 - \frac{R_t\phi-(\alpha-1)(R_t+\delta)}{\phi}\lambda + \frac{(\alpha-1)(R_t+\delta)}{\phi} = 0 \qquad (31)$$

Por tanto, resolviendo la ecuación anterior, las dos raíces vendrían dadas por:

$$\lambda_1,\lambda_2 = \frac{\frac{R_t\phi-(\alpha-1)(R_t+\delta)}{\phi} \pm \sqrt{\left(\frac{R_t\phi-(\alpha-1)(R_t+\delta)}{\phi}\right)^2 - 4\frac{(\alpha-1)(R_t+\delta)}{\phi}}}{2} \qquad (32)$$

12. La Q de Tobin: Resolución numérica

- Senda estable.
- Considerando λ_1 como el valor propio tal que cumpla que $|\lambda_1 + 1| < 1$, la senda estable vendría dada por:

$$\begin{bmatrix} \Delta\widehat{q}_t \\ \Delta\widehat{k}_t \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} \widehat{q}_t \\ \widehat{k}_t \end{bmatrix} \tag{33}$$

- El modelo de la Q de Tobin contiene dos variables endógenas, el stock de capital y la ratio q. Mientras que el stock de capital es una variable rígida al cambio por sus características (cambiar el stock de capital es un proceso que lleva tiempo), la ratio q es una variable totalmente flexible, que además está muy condicionada por sus expectativas.
- Por tanto, ante una perturbación, se va a producir un salto instantáneo en la ratio q.

12. La Q de Tobin: Resolución numérica

- Reajuste instantáneo de la ratio q
- Partimos de la ecuación que describe el comportamiento dinámico de la ratio q respecto a su estado estacionario:

$$\Delta\widehat{q}_t = \frac{R_t\phi - (\alpha - 1)(R_t + \delta)}{\phi}\widehat{q}_t - (\alpha - 1)(R_t + \delta)\widehat{k}_t \tag{34}$$

- Equivalentemente, podemos definir la siguiente trayectoria estable:

$$\Delta\widehat{q}_t = \lambda_1\widehat{q}_t \tag{35}$$

12. La Q de Tobin: Resolución numérica

- Igualando ambas expresiones en el momento en el que se produce la perturbación ($t = 1$) resulta que:

$$\frac{R_t\phi - (\alpha - 1)(R_t + \delta)}{\phi}\widehat{q}_1 - (\alpha - 1)(R_t + \delta)\widehat{k}_1 = \lambda_1\widehat{q}_1 \tag{36}$$

y despejando las desviaciones de la ratio q respecto a su valor de estado estacionario, resulta:

$$\widehat{q}_1 = \frac{(\alpha - 1)(R_t + \delta)}{\frac{R_t\phi - (\alpha - 1)(R_t + \delta)}{\phi} - \lambda_1}\widehat{k}_1 \tag{37}$$