# Clase 11: Las empresas y la decisión de inversión: La Q de Tobin

José L. Torres

Universidad de Málaga

Macroeconomía Avanzada

# 11. Las empresas y la decisión de inversión

- Son las que producen los bienes.
- Para ello alquilan los factores productivos a las familias.
- Suponemos que las empresas maximizan beneficios, sujetas a la restricción tecnológica.
- Problema de optimización en la que se determina un vector de factores productivos, dados unos precios de los mismos, y a través de la función tecnológica, el nivel de producción.

# 11. Las empresas y la decisión de inversión

- Dos enfoques:
  - Modelo neoclásico: Determinación del stock de capital óptimo en función de los cambios en los precios relativos de los factores productivos.
  - Teoría de la Q de Tobin. La tasa de inversión óptima depende de una ratio denominada Q, definida como el cociente entre el valor de mercado de la empresa y el coste de reposición del capital instalado.

# 11. Las empresas y la decisión de inversión

- Tecnología: Función de producción agregada:

$$Y_t = F(K_{t,} L_t) \tag{1}$$

- $Y_t$: Producción agregada de la economía.
- Cumple las siguientes propiedades:

$$F_K > 0, F_L > 0 \tag{2}$$

$$F_{KK} < 0, F_{LL} < 0 \tag{3}$$

$$F_{KL} > 0 \tag{4}$$

# 11. Las empresas y la decisión de inversión

- Condiciones de Inada:

$$\lim_{K \longrightarrow 0} F_K = \infty, \lim_{K \longrightarrow \infty} F_K = 0 \tag{5}$$

$$\lim_{L \longrightarrow 0} F_L = \infty, \lim_{L \longrightarrow \infty} F_L = 0 \tag{6}$$

Es decir, para producir hacen falta ambos factores productivos.

# 11. Las empresas y la decisión de inversión

- Maximización de beneficios (El precio de los bienes lo hemos normalizado a 1):

$$\Pi_t = Y_t - W_t L_t - R_t K_t \tag{7}$$

sujeto a:

$$Y_t = F(K_t, L_t) \tag{8}$$

- Si suponemos rendimientos constantes a escala y mercados competitivos: $\Pi_t = 0$.
- Condiciones de primer orden:

$$F_K(K_t, L_t) - R_t = 0 \tag{9}$$

$$F_L(K_t, L_t) - W_t = 0 \tag{10}$$

- El precio relativo de los factores es igual a su productividad marginal.

# 11. Las empresas y la decisión de inversión

- Ejemplo: Función de producción Cobb-Douglas:

$$F(K_t, L_t) = A_t K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha} \tag{11}$$

- $A_t$: Productividad Total de los Factores.
- $\alpha$ : elasticidad del nivel de producción respecto al capital.
- También la podemos interpretar como la participación de las rentas de capital en la renta total. $1 - \alpha$ sería la participación de las rentas laborales en la renta total.

# 11. Las empresas y la decisión de inversión

- Condiciones de primer orden:

$$\alpha K_t^{\alpha-1} L_t^{1-\alpha} - R_t = 0 \tag{12}$$

$$(1-\alpha) K_t^{\alpha} L_t^{-\alpha} - W_t = 0 \tag{13}$$

- O escrito de otro modo:

$$R_t = \frac{\alpha K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}}{K_t} = \alpha \frac{Y_t}{K_t} \tag{14}$$

$$W_t = \frac{(1-\alpha) K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha}}{L_t} = (1-\alpha) \frac{Y_t}{L_t} \tag{15}$$

# 11. Las empresas y la decisión de inversión

- Como podemos comprobar las productividades marginales son decrecientes:

$$F_{KK} = (\alpha - 1)\alpha K_t^{\alpha-2} L_t^{1-\alpha} < 0 \tag{16}$$

$$F_{LL} = -\alpha(1-\alpha) K_t^{\alpha} L_t^{-\alpha-1} < 0 \tag{17}$$

# 11. Las empresas y la decisión de inversión

- En efecto, podemos comprobar que los beneficios son nulos:

$$\Pi_t = K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha} - R_t K_t - W_t L_t \tag{18}$$

$$\Pi_t = K_t^{\alpha} L_t^{1-\alpha} - \alpha K_t^{\alpha-1} L_t^{1-\alpha} - (1-\alpha) K_t^{\alpha} L_t^{-\alpha} = 0 \tag{19}$$

# 11. Las empresas y la decisión de inversión

- El problema de maximización de beneficios de la empresa también es intertemporal.
- La empresa maximizaría el valor presente de los beneficios. La tasa de actualización sería el tipo de interés real.
- Sin embargo, el resultado sería el mismo que si el problema fuese estático.

# 11. Las empresas y la decisión de inversión

- Definición de beneficios:

$$\Pi_t = P_t Y_t - W_t L_t - R_t K_t \tag{20}$$

- Pero lo que decide la empresa realmente es su volumen de inversión periodo a periodo:

$$I_t = K_{t+1} - (1-\delta) K_t \tag{21}$$

- Por tanto, los beneficios de la empresa los definimos como:

$$\Pi_t = Y_t - W_t L_t - P_t^K I_t \tag{22}$$

- Normalizados el precio del capital a 1. $(P_t^K = 1)$.

# 11. La Q de Tobin

- En la realidad las empresas se enfrentan a unos costes de ajuste al alterar su stock de capital.
- Estos costes de ajuste son mayores cuanto más rápidamente la empresa pretenda ajustar su capital.
- Dos tipos de costes de ajuste:
  - Costes de ajuste externos.
  - Costes de ajuste internos.

# 11. La Q de Tobin

- Costes de ajuste externos:
  - Surge cuando las empresas se enfrentan a una oferta de capital perfectamente elástica.
  - Se puede disponer de bienes de capital a diferentes velocidades.
  - El precio del capital depende del tiempo en que se quiera disponer de él.
  - Cuanto más rápidamente sea, mayor será su precio.
  - Ejemplo de las obras públicas.

# 11. La Q de Tobin

- Costes de ajuste internos:
  - Se miden en términos de pérdidas de producción.
  - Cuando se incorpora nuevo capital hay que destinar parte de los recursos productivos de la empresa a su instalación. Estos recursos no están transitoriamente disponibles para producir.

# 11. La Q de Tobin

- Función de costes de ajuste:

$$C = C(I_t, K_t) \tag{23}$$

$$\Psi(I_t, K_t) = I_t - C(I_t, K_t) \tag{24}$$

- En este caso, la ecuación dinámica de acumulación del stock de capital la podemos definir como:

$$K_{t+1} = (1-\delta)K_t + I_t - C(I_t, K_t) = (1-\delta)K_t + \Psi(I_t, K_t) \tag{25}$$

- Alternativamente, podemos suponer que los costes de ajuste son costes adicionales al valor de la inversión y que suponen un coste en términos de pérdidas de producción y, por tanto, de beneficios. En este caso, la función de acumulación de capital sería la estándar, mientras que la función de beneficios de la empresa sería:

$$\Pi_t = Y_t - W_t L_t - I_t - C(I_t, K_t) \tag{26}$$

# 11. La Q de Tobin

- Características de los costes de ajuste:

$$C(0, K_t) = 0 \tag{27}$$

$$C(I_t, 0) = 0 \tag{28}$$

$$C_I(I_t, K_t) > 0 \tag{29}$$

$$C_K(I_t, K_t) > 0 \tag{30}$$

$$C_{II}(I_t, K_t) > 0 \tag{31}$$

$$C_{KK}(I_t, K_t) > 0 \tag{32}$$

# 11. La Q de Tobin

- Definición de la ratio Q: La ratio Q se calcula como el valor de mercado de una empresa dividido por el conste de reemplazamiento del capital instalado.

$$Q = \frac{VM}{CRK} \tag{33}$$

# 11. La Q de Tobin

| Estructura del modelo de la Q de Tobin | |
|---|---|
| Beneficios de la empresa | $\Pi_t = Y_t - W_t L_t - I_t - C(I_t, K_t)$ |
| Función de producción | $Y_t = F(K_t, L_t)$ |
| Ecuación de acumulación de capital | $K_{t+1} = (1-\delta)K_t + I_t$ |
| Costes de ajuste | $C = C(I_t, K_t)$ |
| Stock de capital inicial | $K_0 > 0$ |
| Ratio $Q$ | $Q_t = \frac{V_t}{K_t}$ |

# 11. La Q de Tobin

- El problema de maximización de beneficios intertemporales vendría dado por:

$$\max E_t \sum_{t=0}^{T} \frac{1}{(1+R_t)^t} \Pi_t \tag{34}$$

sujeto a la restricción tecnológica y a la restricción dada por la ecuación de acumulación de capital:

$$Y_t = F(K_t, L_t) \tag{35}$$

$$K_{t+1} = (1-\delta)K_t + I_t \tag{36}$$

siendo el factor de descuento el tipo de interés real, $R_t$, $E_t$ es la esperanza matemática, siendo $K_0 > 0$, y conocido. Además, también se va a cumplir que:

$$\lim_{T \to \infty} K_T = \overline{K} \tag{37}$$

donde $\overline{K}$ es el stock de capital de estado estacionario.

# 11. La Q de Tobin

- El problema a maximizar podemos escribirlo como:

$$\max \sum_{t=0}^{T} \frac{1}{(1+R_t)^t} \left[ Y_t - W_t L_t - I_t - C(I_t, K_t) \right] \tag{38}$$

sujeto a las restricciones anteriores. Sustituyendo la restricción tecnológica en la función objetivo obtenemos la siguiente función auxiliar de Lagrange:

$$\begin{aligned} V &= \sum_{t=0}^{T} \frac{1}{(1+R_t)^t} \left[ F(K_t, L_t) - W_t L_t - I_t - C(I_t, K_t) \right] \\ &\quad -\lambda_t (K_{t+1} - I_t - (1-\delta) K_t) \end{aligned} \tag{39}$$

# 11. La Q de Tobin

- Las condiciones de primer orden al problema anterior son las siguientes:

$$\frac{\partial V}{\partial K_{t+1}} : \frac{1}{(1+R_{t+1})^{t+1}} \left[F_K(K_{t+1}, L_{t+1}) - C_K(I_{t+1}, K_{t+1})\right] + \lambda_{t+1}(1-\delta) - \lambda_t = 0 \tag{40}$$

$$\frac{\partial V}{\partial I_t} : -\frac{1 + C_I(I_t, K_t)}{(1+R_t)^t} + \lambda_t = 0 \tag{41}$$

$$\frac{\partial V}{\partial L_t} : \frac{F_L(K_t, L_t) - W_t}{(1+R_t)^t} = 0 \tag{42}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda_t} : -K_{t+1} + I_t + (1-\delta)K_t = 0 \tag{43}$$

# 11. La Q de Tobin

- A partir de la condición de primer orden (41) obtenemos el valor del multiplicador de Lagrange para el periodo $t$:

$$\lambda_t = \frac{1 + C_I(I_t, K_t)}{(1 + R_t)^t} \tag{44}$$

y para el periodo $t + 1$:

$$\lambda_{t+1} = \frac{1 + C_I(I_{t+1}, K_{t+1})}{(1 + R_{t+1})^{t+1}} \tag{45}$$

Dado que el tipo de interés (el factor de descuento) es una variable exógena, suponemos que su valor se mantiene constante periodo a periodo, tal que $R_{t+1} = R_t$. Sustituyendo en la condición de primer orden (40), el multiplicador de Lagrange para el periodo $t$ y $t+1$, resulta que:

$$\begin{aligned} &F_K(K_{t+1}, L_{t+1}) - C_K(I_{t+1}, K_{t+1}) = \\ &(1+R_t)\left[1 + C_I(I_t, K_t)\right] - \left[1 + C_I(I_{t+1}, K_{t+1})\right](1-\delta) \end{aligned} \tag{46}$$

expresión que iguala el valor del producto marginal del capital con el coste de uso del mismo, y que refleja la decisión de inversión de la empresa. Finalmente, directamente a partir de la condición de primer orden (42) obtenemos la condición que iguala la productividad marginal del trabajo con el salario:

$$F_L(K_t, L_t) = W_t \tag{47}$$

# 11. La Q de Tobin

- A continuación definimos el valor $q$. La ratio $q$ la definimos como:

$$q_t = \lambda_t \left(1 + R_t\right)^t \tag{48}$$

Por tanto, tenemos que el precio sombra del capital lo podemos definir como:

$$\lambda_t = \frac{q_t}{(1 + R_t)^t} \tag{49}$$

Usando la definición del parámetro de Lagrange obtenida anteriormente, resulta que,

$$q_t = 1 + C_I(I_t, K_t) \tag{50}$$

# 11. La Q de Tobin

- Sustituyendo esta expresión en la condición de equilibrio para el stock de capital (46) obtenemos:

$$F_K(K_{t+1}, L_{t+1}) - C_K(I_{t+1}, K_{t+1}) = (1 + R_t)\, q_t - q_{t+1}(1 - \delta) \quad (51)$$

A partir de la expresión anterior, obtenemos la siguiente ecuación que nos indica la dinámica de la marginal $q$:

$$q_{t+1} = \frac{(1 + R_t)q_t - F_K(K_{t+1}, L_{t+1}) + C_K(I_{t+1}, K_{t+1})}{1 - \delta} \quad (52)$$

Esta expresión indica que ahora la productividad marginal del capital es igual a una expresión en la que aparece el coste de uso del capital pero también la función de inversión neta de costes de ajuste. Así, si no existiesen costes de ajuste entonces $C_K(I_{t+1}, K_{t+1}) = 0$, por lo que la condición de equilibrio sería:

$$q_{t+1} = \frac{(1 + R_t)q_t - F_K(K_{t+1}, L_{t+1})}{1 - \delta} \quad (53)$$

# 11. La Q de Tobin

- Por tanto, el modelo de la $Q$ de Tobin puede resumirse en un sistema de dos ecuaciones dinámicas, una para el stock de capital y otra para la ratio $q$, dadas por:

$$q_t = 1 + C_I(I_t, K_t) \tag{54}$$

$$(1-\delta)q_{t+1} + F_K(K_{t+1}, L_{t+1}) = (1+R_t)q_t + C_K(I_{t+1}, K_{t+1}) \tag{55}$$

más la condición estática que determina el nivel de empleo. Si suponemos que el empleo se mantiene fijo, el modelo de la Q de Tobin lo podemos resolver en términos del stock de capital y la ratio $q$. El stock de capital es una variable de estado, que viene predeterminada por las decisiones tomadas en el periodo anterior, mientras que la ratio $q$ es una variable flexible, que está sujeta a cambios en las expectativas, y que se ajusta de forma instantánea ante perturbaciones.

# 11. La Q de Tobin

- Ejemplo:
- Vamos a normalizar el nivel de empleo a 1 ($L_t = 1$). De este modo la función de producción que vamos a utilizar vendría dada por:

$$Y_t = F(K_t) = K_t^{\alpha} \tag{56}$$

donde el nivel de empleo suponemos que es fijo y donde $0 < \alpha < 1$.

- Función de costes de ajuste:

$$C(I_t, K_t) = \frac{\phi}{2}\left(\frac{I_t - \delta K_t}{K_t}\right)^2 K_t \tag{57}$$

representando una función de costes de ajuste cuadráticos que depende tanto de la inversión como del stock de capital, y donde $\phi > 0$ es un parámetro que nos indicaría cómo de sensible es la inversión respecto al valor de la ratio $q$.

# 11. La Q de Tobin

- En este caso concreto tendríamos que:

$$C_I(I_t, K_t) = \phi\left(\frac{I_t - \delta K_t}{K_t}\right) \tag{58}$$

$$C_K(I_t, K_t) = \frac{\phi}{2}\left(\frac{I_t - \delta K_t}{K_t}\right)^2 - \phi\left(\frac{I_t - \delta K_t}{K_t}\right)\frac{I_t}{K_t} \tag{59}$$

# 11. La Q de Tobin

- Sustituyendo en la solución del modelo resulta que:

$$q_t = 1 + \phi \left( \frac{I_t - \delta K_t}{K_t} \right) \tag{60}$$

$$\begin{aligned} (1-\delta) q_{t+1} &= (1+R_t) q_t - \alpha K_{t+1}^{\alpha-1} + \frac{\phi}{2} \left( \frac{I_{t+1} - \delta K_{t+1}}{K_{t+1}} \right)^2 \\ &\quad - \phi \left( \frac{I_{t+1} - \delta K_{t+1}}{K_{t+1}} \right) \frac{I_{t+1}}{K_{t+1}} \end{aligned} \tag{61}$$

# 11. La Q de Tobin

- A partir de estas expresiones, vamos a obtener las dos ecuaciones en diferencias que determinan este modelo. De la ecuación de acumulación de capital resulta que:

$$I_t - \delta K_t = K_{t+1} - K_t \tag{62}$$

Definiendo $\Delta K_t = K_{t+1} - K_t$, y sustituyendo en la expresión (60), obtenemos directamente la ecuación de acumulación de capital:

$$q_t - 1 = \phi \frac{\Delta K_t}{K_t} \tag{63}$$

y despejando resulta:

$$\Delta K_t = (q_t - 1) \frac{K_t}{\phi} \tag{64}$$

# 11. La Q de Tobin

- Por su parte, operando en la expresión (61) y definiendo $\Delta q_t = q_{t+1} - q_t$, obtenemos que:

$$\begin{aligned} q_{t+1} &= \frac{(1+R_t)}{(1-\delta)} q_t - \frac{\alpha}{(1-\delta)} K_{t+1}^{\alpha-1} + \frac{\phi}{2(1-\delta)} \left( \frac{I_{t+1} - \delta K_{t+1}}{K_{t+1}} \right)^2 \\ &\quad - \frac{\phi}{(1-\delta)} \left( \frac{I_{t+1} - \delta K_{t+1}}{K_{t+1}} \right) \frac{I_{t+1}}{K_{t+1}} \end{aligned} \tag{65}$$

# 11. La Q de Tobin

- Sumando y restando $q_t$ en la parte izquierda de esta expresión:

$$\begin{aligned} q_{t+1} - q_t + q_t &= \frac{(1+R_t)}{(1-\delta)} q_t - \frac{\alpha}{(1-\delta)} K_{t+1}^{\alpha-1} + \frac{\phi}{2(1-\delta)} \left( \frac{I_{t+1} - \delta K}{K_{t+1}} \right. \\ &\quad - \frac{\phi}{(1-\delta)} \left( \frac{I_{t+1} - \delta K_{t+1}}{K_{t+1}} \right) \frac{I_{t+1}}{K_{t+1}} \end{aligned}$$

y reordenando términos resulta:

$$\Delta q_t = \frac{(R_t + \delta) q_t - \alpha K_{t+1}^{\alpha-1} + \frac{\phi}{2} \left( \frac{I_{t+1} - \delta K_{t+1}}{K_{t+1}} \right)^2 - \phi \left( \frac{I_{t+1} - \delta K_{t+1}}{K_{t+1}} \right) \frac{I_{t+1}}{K_{t+1}}}{(1-\delta)} \tag{67}$$

Estado Estacionario

La ecuación dinámica para el stock de capital (la regla de inversión en estado estacionario, vendría dada por:

$$DK_t = (\bar{q} \quad 1)\frac{\bar{K}}{f} = 0 \tag{68}$$

Dado que en estado estacionario la anterior ecuación tiene que ser igual a cero, esto supone que el valor de la ratio $q$ en estado estacionario tiene que ser igual a la unidad:

$$\bar{q} = 1 \tag{69}$$

En efecto, en estado estacionario resulta que $Q(\ ) = 0$, por que resulta que $\bar{q} = 1$.