Clase 1: Introducción a la Macroeconomía dinámica: Ecuaciones diferenciales y sistemas dinámicos

José L. Torres

Universidad de Málaga

Macroeconomía Avanzada

1. Introducción a la Macroeconomía Dinámica

- Microeconomía: estudio del comportamiento de los agentes a nivel individual o en pequeñas cantidades.
- Macroeconomía: estudio del comportamiento de la economía a nivel agregado.

Dentro de la macroeconomía podemos adoptar enfoques:

Crecimiento Económico (largo plazo).

Fluctuaciones Cíclicas (corto plazo).

1. Introducción a la Macroeconomía Dinámica

- Microfundamentación de la macroeconomía. Tanto la micro como la macro son aplicaciones consistentes de la teoría neoclásica.
- Equilibrio general:

  Los agentes son racionales, optimizadores, dadas unas dotaciones, unas preferencias y una tecnología.

  Las decisiones de los agentes con compatibles entre sí.

1. Introducción a la Macroeconomía Dinámica

Escuelas de pensamiento económico:

1. **Clásicos (Smith, Ricardo,...): No existía distinción entre la micro y la macro.**
2. **Ramsey (1928): Optimización dinámica.**
3. Keynes (1936): Teoría General del Empleo, el Tipo de Interés y el Dinero: Ruptura entre la micro y la macro.
4. 1940-1970: Síntesis Neoclásica (IS-LM).
5. **Los 70: Expectativas Racionales.**
6. **1982: Teoría del Ciclo Real: Vuelta a Ramsey (1928).**
7. Actualmente: Desarrollo de modelos dinámicos de equilibrio general más complejos con elementos Nuevo Keynesianos.

1. Introducción a la Macroeconomía Dinámica

- Importancia de considerar el tiempo (t).
- No todas las variables económicas se mueven a la misma velocidad. Los precios de los bienes se ajustan muy lentamente mientras que, por ejemplo, el tipo de cambio se ajusta de manera inmediata.
- Dos posibilidades: tiempo continuo y tiempo discreto.

1. Introducción a la Macroeconomía Dinámica

DEFINICIÓN DE MODELO:

- Concepto de modelo: Mapa, plano, ...
- Un modelo macroeconómico puede describirse como un sistema de ecuaciones diferenciales. Estas ecuaciones incluyen un número de relaciones dinámicas entre un conjunto de variables endógenas $X_t \in R^n$ y con conjunto de variables exógenas $Z_t \in R^m$.
- Igual que en un sistema físico, excepto por una importante diferencia: el comportamiento de la economía depende de las expectativas generadas por el pensamiento humano.

1. Introducción a la Macroeconomía Dinámica

Concepto Clave: Distinguir entre variables endógenas y exógenas:

- El nivel de producción.
- Ataque marciano.
- El nivel de precios.
- La cantidad de dinero.
- El tipo de interés.
- Un terremoto.
- Tipo de cambio.
- Stock de capital.
- Impuestos.

1. Ecuaciones diferenciales, ecuaciones en diferencias y sistemas dinámicos

Modelo general:

$$\mathbf{X}_t = E_t \left[F(\mathbf{X}_{t+1}, \mathbf{Z}_t, \mathbf{u}_t) \right]$$

$$\mathbf{Z}_t = G(\mathbf{Z}_{t-1}, \mathbf{v}_t)$$

donde $\mathbf{X}_t$ es un vector de variables endógenas, $\mathbf{Z}_t$ vector de variables exógenas, E_t operador de expectativas, $\mathbf{u}_t$ y $\mathbf{v}_t$ son perturbaciones aleatorias i.i.d.

F : Teoría Económica.
G: Regla de política.

- Solución: Secuencia de distribuciones de probabilidad.

1. Ecuaciones diferenciales, ecuaciones en diferencias y sistemas dinámicos

Vamos a simplificar el modelo general.

- Primer paso: Eliminamos la regla de política ($G = 0$):

$$\mathbf{X}_t = E_t \left[F(\mathbf{X}_{t+1}, \mathbf{Z}_t, \mathbf{u}_t) \right]$$

- Segundo paso: Eliminamos la existencia de incertidumbre ($\mathbf{u}_t = 0$):

$$\mathbf{X}_t = \left[F(\mathbf{X}_{t+1}, \mathbf{Z}_t) \right]$$

1. Ecuaciones diferenciales, ecuaciones en diferencias y sistemas dinámicos

Tiempo continuo: Podemos reescribir el modelo anterior en términos de un sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\dot{\mathbf{X}}_t = F(\mathbf{X}_t, \mathbf{Z}_t) \tag{1}$$

donde

$$\dot{\mathbf{X}}_t = \frac{d\mathbf{X}_t}{dt} \tag{2}$$

1. Ecuaciones diferenciales, ecuaciones en diferencias y sistemas dinámicos

Es más fácil trabajar con logaritmos:

$$x_t = \ln X_t \tag{3}$$

Así, la derivada con respecto al tiempo es equivalente a la tasa de crecimiento de la variable:

$$\dot{x}_t = \frac{d \ln X_t}{dt} = \frac{\frac{dX_t}{dt}}{X_t} = \frac{\dot{X}_t}{X_t} \tag{4}$$

1. Ecuaciones diferenciales, ecuaciones en diferencias y sistemas dinámicos

Tiempo discreto: Podemos reescribir el modelo anterior en términos de un sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\Delta \mathbf{X}_t = F(\mathbf{X}_t, \mathbf{Z}_t) \tag{5}$$

donde

$$\Delta \mathbf{X}_t = \mathbf{X}_{t+1} - \mathbf{X}_t \tag{6}$$

1. Ecuaciones diferenciales, ecuaciones en diferencias y sistemas dinámicos

Es más fácil trabajar con logaritmos:

$$x_t = \ln X_t \tag{7}$$

Así, la derivada con respecto al tiempo es equivalente a la tasa de crecimiento de la variable:

$$\begin{aligned} \Delta x_t &= x_{t+1} - x_t = \ln X_{t+1} - \ln X_t = \ln\left(\frac{X_{t+1}}{X_t}\right) \\ &= \ln\left(1 + \frac{X_{t+1} - X_t}{X_t}\right) \simeq \frac{X_{t+1} - X_t}{X_t} \end{aligned} \tag{8}$$

1. Ecuaciones diferenciales, ecuaciones en diferencias y sistemas dinámicos

Definición de equilibrio: **Estado Estacionario**:

$$\bar{\mathbf{x}} \Longrightarrow \dot{\mathbf{x}}_t = f(\mathbf{x}_t, \mathbf{z}_t) = 0 \Longrightarrow f(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{z}_t) = 0 \tag{9}$$

Vector de ceros de dimensión n. El sistema de ecuaciones diferenciales podemos escribirlo como:

$$\dot{\mathbf{x}}_t = A\mathbf{x}_t + B\mathbf{z}_t \tag{10}$$

donde A es una matriz $n \times n$, B es una matriz $n \times m$ y $\mathbf{z}_t$ es el vector de variables exógenas $m \times 1$.

1. Ecuaciones diferenciales, ecuaciones en diferencias y sistemas dinámicos

Vamos a trabajar siempre con dos ecuaciones, para poder realizar representaciones gráficas. Por tanto $n = 2$.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{1,t} \\ \dot{x}_{2,t} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{bmatrix} + Bz_t \tag{11}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \tag{12}$$

Cálculo del Estado Estacionario:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{1,t} \\ \dot{x}_{2,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow A \begin{bmatrix} \bar{x}_{1,t} \\ \bar{x}_{2,t} \end{bmatrix} = -Bz_t \tag{13}$$

O

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_{1,t} \\ \bar{x}_{2,t} \end{bmatrix} = -A^{-1}Bz_t \tag{14}$$

Esta es la forma que vamos a utilizar para calcular el valor de estado estacionario de las variables endógenas.

Concepto de Estabilidad:

$$Det\left[A-\lambda I\right]=0 \tag{15}$$

$$Det\left[\left[\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array}\right]-\left[\begin{array}{cc} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{array}\right]\right]=0 \tag{16}$$

Solución:

$$\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})=0 \tag{17}$$

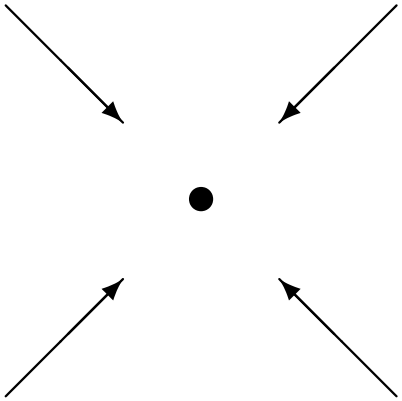
Tres posibles soluciones. En tiempo continuo:

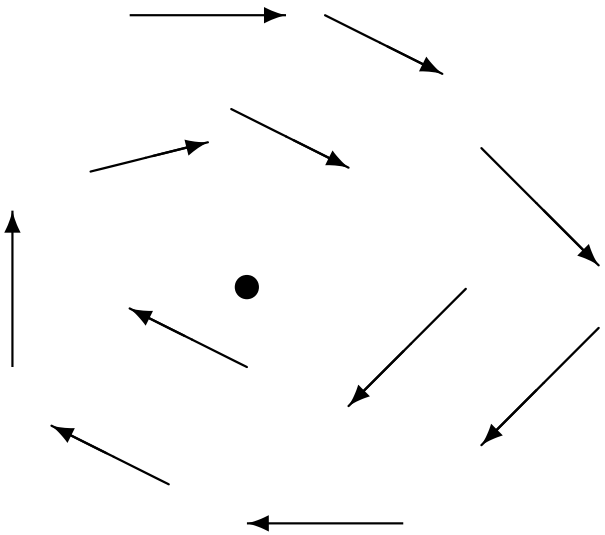
Raíces	Caso 1	Caso 2	Caso 3
λ_1	<0	<0	>0
λ_2	<0	>0	>0

1. Ecuaciones diferenciales, ecuaciones en diferencias y sistemas dinámicos

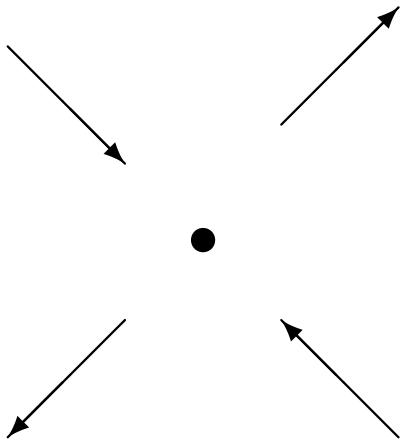
- Caso 1 ($\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$): Estabilidad global.Todas las trayectorias tienden al estado estacionario.
- Caso 2 ($\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$): Punto de silla. Hay trayectorias que tienden al estado estacionario pero también trayectorias que se alejan del equilibrio.
- Caso 3 ($\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$): Inestabilidad global. Todas las trayectorias tienden a alejarnos del estado estacionario.

Caso 1: $(\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0)$

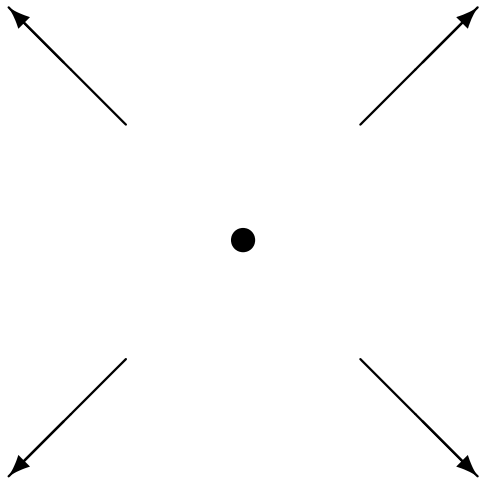


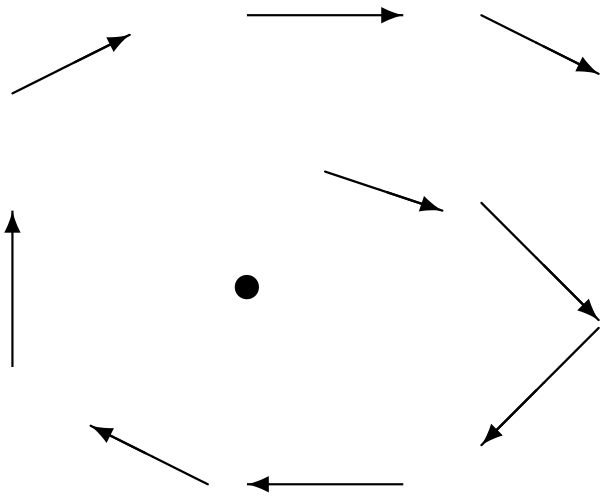


Caso 2 $(\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0)$



Caso 3: $(\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0)$





Concepto de Estabilidad:

$$Det\left[A-\lambda I\right]=0 \tag{18}$$

$$Det\left[\left[\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array}\right]-\left[\begin{array}{cc} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{array}\right]\right]=0 \tag{19}$$

Solución:

$$\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})=0 \tag{20}$$

Tres posibles soluciones. En tiempo discreto:

Raíces (Módulo)	Caso 1	Caso 2	Caso 3
λ_1+1	<1	<1	>1
λ_2+1	<1	>1	>1