

# Modulación adaptativa no ideal para MIMO con conformación de haz y combinación óptima

J.F. Paris Ángel, E. Martos Naya, U. Fernández Plazaola, J.T. Entrambasaguas Muñoz  
paris@ic.uma.es, eduardo@ic.uma.es, unai@ic.uma.es, jtem@ic.uma.es

Dpto. de Ingeniería de Comunicaciones. Universidad de Málaga. Campus Universitario de Teatinos, Málaga

**Abstract**—In this paper, we analyze the impact of imperfect channel state information (CSI) on the performance of adaptive modulation for multiple-input multiple-output (MIMO) beamforming with maximal ratio combining (MRC). Important throughput improvements can be obtained in MIMO fading channels by employing adaptive modulation. However, accurate CSI is critical to achieve these performance gains. Average spectral efficiency (ASE) and bit-error probability (BEP) are analyzed for multi-mode transmission when channel prediction errors occur in slow Rayleigh fading. Closed-form expressions are then obtained to evaluate the performance of an adaptive modulation scheme which is designed to take into account imperfect CSI.

## I. INTRODUCCIÓN

Dos de las técnicas más prometedoras para aumentar la eficiencia espectral de los sistemas de comunicaciones móviles actuales son, por una parte, el uso de múltiples antenas para crear sistemas de múltiples entradas y múltiples salidas (MIMO), y por otra, la modulación adaptativa [1]. Es más, las posibilidades potenciales de ambas técnicas pueden combinarse para conseguir aumentos espectaculares en las prestaciones del sistema.

Si se dispone de la información del estado del canal, tanto en el transmisor como en el receptor, el canal MIMO puede aprovecharse para realizar conformación de haz en el transmisor y combinación óptima en el receptor [2]. También puede aprovecharse dicha información sobre el estado del canal para elegir de forma apropiada la constelación empleada en cada momento, y así conseguir transmisión con velocidad variable adaptada al estado del canal [3]

En un sistema no ideal, donde el estado del canal se conoce de forma imperfecta, las prestaciones de la modulación adaptativa sobre MIMO con conformación de haz pueden verse seriamente comprometidas [2]. En la mayoría de los sistemas el estado del canal se predice en el receptor y se envía al transmisor por el canal de retorno. Sin embargo, el conocimiento del estado del canal en el transmisor no puede ser perfecto debido a los inevitables errores de predicción que se cometen. Estos errores, junto con los asociados al proceso de adaptación de la modulación, pueden causar un significativo incremento de la probabilidad de error.

Debido a su importancia teórica y práctica, se han realizado diversos estudios para obtener las prestaciones de la modulación adaptativa sobre sistemas MIMO con conformación de haz [2]-[8]. No obstante, existen diversos aspectos del

problema que aún no han sido tratados con la suficiente profundidad.

En este artículo se derivan expresiones cerradas para la probabilidad de error de bit (BEP) en sistemas MIMO con conformación de haz que usan modulación adaptativa, asumiendo errores en la predicción del canal. Dichas expresiones generalizan las obtenidas en [2] para una configuración arbitraria de antenas. El análisis anterior se utiliza para evaluar las prestaciones de esquemas de modulación adaptativa que son diseñados teniendo en cuenta el error de predicción.

El artículo se organiza como sigue. La sección II describe el modelo de sistema utilizado. En la sección III se lleva a cabo el análisis y diseño del sistema. En la sección IV se presentan algunos resultados numéricos que aprovechan los resultados de la sección anterior. Por último, en la sección V se presentan las conclusiones de este trabajo.

## II. MODELO DE SISTEMA

El modelo de sistema para un sistema MIMO con modulación adaptativa, conformación de haz y combinación óptima se representa en la figura 1. El sistema consta de  $N_T$  antenas transmisoras y  $N_R$  antenas receptoras, y la ganancia del canal se modela como una matriz compleja  $\mathbf{H}$  de dimensiones  $N_R \times N_T$ , cuyas entradas  $H_{i,j}$  representan la ganancia del canal entre la antena transmisora  $j$  y la receptora  $i$ . Estos canales tienen distribución Rayleigh y una respuesta plana y lentamente variable. Los elementos  $H_{i,j}$  se consideran variables aleatorias complejas independientes y con la misma distribución gaussiana circularmente simétrica, con media cero y varianza unidad. El ruido se modela como un vector aditivo  $\boldsymbol{\varsigma}$  de longitud  $N_R$ , cuyos elementos  $\varsigma_k$  son variables independientes con la misma distribución gaussiana circularmente simétrica y varianza  $\sigma_n^2$ . La señal recibida se puede expresar como

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \boldsymbol{\varsigma}, \quad (1)$$

donde  $\mathbf{y}$  es un vector complejo recibido de longitud  $N_R$  y  $\mathbf{x}$  es el vector complejo transmitido de longitud  $N_T$ .

En el receptor se realizan dos procesos distintos de estimación de canal: predicción e interpolación. El canal predicho se emplea para obtener el vector de conformación de haz que debe enviarse al transmisor. El canal interpolado se necesita para realizar la combinación óptima en el receptor. Ambos procesos se basan en una estimación previa basada en el uso de pilotos, cuya descripción se expone en [2] y se resume

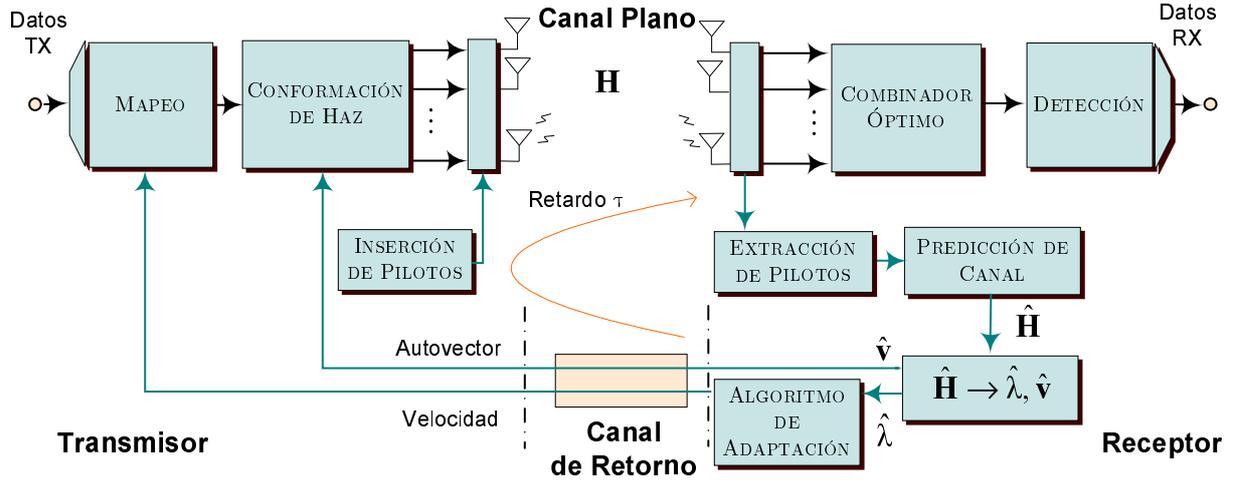


Fig. 1. Modelo de sistema para MIMO adaptativo con conformación de haz y combinación óptima

brevemente a continuación. Los datos se transmiten organizados en tramas de duración  $PT_S$ , donde  $T_S$  es el periodo de símbolo y  $P$  la longitud de la trama. Se inserta un símbolo conocido en cada intervalo piloto de la trama. Este símbolo se expande durante  $N_T$  periodos de símbolo mediante códigos ortogonales que permiten separar el problema de estimación de canal en  $N_T$  problemas de estimación de canales con una única antena transmisora. Una vez que los pilotos son extraídos y desacoplados se realiza una estimación de canal inicial dividiendo los pilotos recibidos por el símbolo insertado en el transmisor. El canal predicho y el interpolado se obtienen filtrando adecuadamente la estimación inicial del canal.

Una de las principales diferencias entre ambos procesos de estimación es que la interpolación se realiza mediante un banco de filtros símbolo a símbolo y la predicción se realiza con un único filtro trama a trama. Como la interpolación se puede hacer muy precisa usando un filtrado no causal (almacenando los símbolos recibidos en un buffer), en este artículo se asumirá que el canal interpolado no tiene errores.

Al igual que en [2], en este análisis se ha utilizado un modelo de canal lentamente variante en el que su respuesta permanece invariante a lo largo de cada trama y la correlación entre la respuesta de unas tramas a otras sigue el conocido modelo de Jakes.

A partir de la estimación inicial del canal, el receptor realiza una predicción de la matriz del canal  $\mathbf{H}$  con  $\tau$  segundos de antelación, donde  $\tau$  es el retardo de adaptación del sistema. El canal predicho  $\hat{\mathbf{H}}$  se puede expresar como

$$\hat{\mathbf{H}} = \mathbf{H} - \hat{\boldsymbol{\Xi}} \quad (2)$$

donde  $\hat{\boldsymbol{\Xi}}$  es la matriz de error de predicción, cuyos elementos son variables independientes y con la misma distribución gaussiana circularmente simétrica de media cero y varianza  $\chi$ . El principio de ortogonalidad de los filtros de Wiener garantiza que los  $\hat{H}_{i,j}$  y los  $\hat{\Xi}_{i,j}$  son variables incorreladas y por tanto, al tratarse de variables gaussianas, independientes. La varianza

$\chi$  se puede calcular como

$$\chi = \chi(\bar{\gamma}_P; \mathcal{P}) = 1 - \mathbf{w}(\mathcal{P})^T \left( \mathbf{W}(\mathcal{P}) + \frac{1}{\bar{\gamma}_P} \mathbf{I} \right)^{-1} \mathbf{w}(\mathcal{P}), \quad (3)$$

donde los elementos de la matriz  $\mathbf{W}$  (de dimensiones  $F \times F$ ) son  $W_{m,m'} = J_0(2\pi(T_D|m-m'|))$  y los elementos del vector  $\mathbf{w}$  (de longitud  $F$ ) son  $w_m = J_0(2\pi(T_D m + \tau_D))$ . Hay que destacar que  $\chi$  depende de la relación señal a ruido de los símbolos pilotos  $\bar{\gamma}_P$  y de un conjunto de parámetros de la predicción  $\mathcal{P}$ . Dicho conjunto es  $\mathcal{P} = \{F, T_D, \tau_D\}$ , donde  $F$  es el número de coeficientes del predictor,  $T_D = f_D T_S P$  es el periodo de trama normalizado a la frecuencia doppler  $f_D$  y  $\tau_D = f_D \tau$  es el retardo de adaptación normalizado.

A partir del canal predicho  $\hat{\mathbf{H}}$ , el vector de conformación de haz óptimo  $\hat{\mathbf{v}}$  es el autovector correspondiente al mayor autovalor  $\hat{\lambda}$  de la matriz  $\hat{\mathbf{H}}^H \hat{\mathbf{H}}$  [2], que viene dado por  $\hat{\lambda} = \hat{\mathbf{v}}^H \hat{\mathbf{H}}^H \hat{\mathbf{H}} \hat{\mathbf{v}}$ . Cada trama el receptor envía al transmisor el vector  $\hat{\mathbf{v}}$  predicho con suficiente antelación para que al realizar la conformación de haz el canal coincida aproximadamente con el predicho. Usando  $\hat{\mathbf{v}}$ , el vector transmitido resulta  $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{v}}z$ , donde  $z$  es el símbolo complejo transmitido. La ganancia efectiva del canal es un vector definido como  $\mathbf{h} \triangleq \mathbf{H}\hat{\mathbf{v}}$  y la ganancia efectiva predicha es el vector  $\hat{\mathbf{h}} \triangleq \hat{\mathbf{H}}\hat{\mathbf{v}}$ , cuya norma euclídea es  $\|\hat{\mathbf{h}}\|^2 = \hat{\lambda}$ . La ganancia efectiva del canal también puede expresarse como  $\mathbf{h} \triangleq \mathbf{H}\hat{\mathbf{v}} = (\hat{\mathbf{H}} + \hat{\boldsymbol{\Xi}})\hat{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{h}} + \boldsymbol{\Psi}$ , donde  $\boldsymbol{\Psi}$  es el vector complejo de error de ganancia efectiva del canal.

En el receptor se estima la ganancia efectiva del canal  $\mathbf{h}$  para realizar la combinación óptima. Usando el canal interpolado  $\hat{\mathbf{H}}$  y el vector conformador de haz  $\hat{\mathbf{v}}$  enviado al transmisor se obtiene una estimación perfecta del vector  $\mathbf{h}$ . Luego el símbolo  $r$  que resulta de realizar la combinación óptima al vector recibido  $\mathbf{y}$  dado en (1) es

$$r = z + \frac{\mathbf{h}^H \boldsymbol{\zeta}}{\|\mathbf{h}\|^2} = z + \zeta', \quad (4)$$

donde  $\zeta'$  es el ruido resultante tras la combinación óptima.

En el receptor también se utiliza la predicción de canal para llevar a cabo la modulación adaptativa. Para describir adecuadamente el proceso de adaptación, definimos la relación señal a ruido (SNR) instantánea predicha como

$$\hat{\gamma} \triangleq \hat{\lambda}\bar{\gamma}, \quad (5)$$

donde  $\bar{\gamma} \triangleq \bar{S}_T/\sigma_n^2$  es la SNR media y  $\bar{S}_T$  la potencia media transmitida. Al igual que en [2], se adopta una ley de adaptación que usa potencia constante y velocidad variable. Se asumen  $N_F$  modos de transmisión que se corresponden con velocidades de transmisión  $\{R_i\}_{i=0}^{N_F-1}$  (bits/símbolo) (incluyendo  $R_0 = 0$  como NOTX). Cuando hay transmisión, esta se realiza usando BPSK o constelaciones  $2^{R_i}$ -QAM cuadradas. El  $i$ -ésimo modo de transmisión se utiliza cuando la SNR instantánea se encuentra entre el umbral de conmutación inferior  $\hat{\gamma}_{i-1}$  y el superior  $\hat{\gamma}_i$ . Para simplificar la notación definimos  $\hat{\gamma}_{-1} \triangleq 0$  y  $\hat{\gamma}_{N_F-1} \triangleq \infty$ . Se asume que, por encima del umbral de conmutación  $\hat{\gamma}_0$ , se utiliza una potencia constante  $S$ .

### III. MODULACIÓN ADAPTATIVA

En esta sección se lleva a cabo tanto el análisis como el diseño de esquemas de modulación adaptativa para el modelo de sistema presentado en la sección anterior. En la sección III-A se analizan las prestaciones de la modulación adaptativa, concretamente se obtienen expresiones cerradas para la eficiencia espectral y la BEP. En la sección III-A se diseñan dos tipos de esquemas de modulación que pueden tener en cuenta, o no, el error de predicción.

#### A. Análisis

La eficiencia espectral (bits/símbolo), con la notación adoptada, se puede calcular como

$$\bar{\nu} = \sum_{i=1}^{F-1} R_i \int_{\hat{\gamma}_{i-1}}^{\hat{\gamma}_i} p_{\hat{\gamma}}(\hat{\gamma}) d\hat{\gamma}. \quad (6)$$

Puesto que la función densidad de probabilidad (fdp) del mayor autovalor asociado a matrices complejas de Wishart se puede expresar como una suma de fdps elementales, la fdp de la SNR predicha instantáneamente se puede expresar como

$$p_{\hat{\gamma}}(\hat{\gamma}) = K_{m,n} \sum_{k=1}^m \sum_{l=n-m}^{(n+m-2k)k} \frac{a_{k,l} \hat{\gamma}^l}{((1-\chi)\bar{\gamma})^{l+1}} \exp\left(-\frac{k\hat{\gamma}}{(1-\chi)\bar{\gamma}}\right) \quad (7)$$

donde  $m \doteq \min\{N_T, N_R\}$ ,  $n \doteq \max\{N_T, N_R\}$ , la constante  $K_{m,n} = (\prod_{i=1}^m (m-i)! \prod_{i=1}^m (n-i)!)^{-1}$  y los coeficientes  $a_{k,l}$  pueden obtenerse de forma exacta con el algoritmo propuesto en [9].

Para integrar (6) con la fdp (7) se necesita considerar que [10, eq. 3.381-3]

$$\int_x^y t^n e^{-\alpha t} dt = \alpha^{-(1+n)} (\Gamma(1+n, \alpha x) - \Gamma(1+n, \alpha y)) \quad (8)$$

donde  $0 \leq x \leq y \in \mathbb{R}, \alpha \geq 0 \in \mathbb{R}, n \geq 0 \in \mathbb{Z}$  y la función Gamma incompleta para valores naturales en su primera variable puede calcularse como

$$\Gamma(1+n, z) = n! e^{-z} \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

Por la tanto, mediante (8)-(9) y algunas manipulaciones algebraicas elementales, se obtiene la siguiente expresión para la eficiencia espectral

$$\bar{\nu} = \sum_{i=1}^{N_F-1} R_i \sum_{k=1}^m \sum_{l=n-m}^{(n+m-2k)k} \sum_{w=0}^l K_{m,n} a_{k,l} \frac{l!}{w! k^{l+1}} \times \left[ \left( \frac{k\hat{\gamma}_{i-1}}{(1-\chi)\bar{\gamma}} \right)^w e^{-\frac{k\hat{\gamma}_{i-1}}{(1-\chi)\bar{\gamma}}} - \left( \frac{k\hat{\gamma}_i}{(1-\chi)\bar{\gamma}} \right)^w e^{-\frac{k\hat{\gamma}_i}{(1-\chi)\bar{\gamma}}} \right] \quad (10)$$

La BEP se puede calcular como

$$ABEP = \frac{\sum_{i=1}^{N_F-1} R_i \int_{\hat{\gamma}_{i-1}}^{\hat{\gamma}_i} CBEP_i(\hat{\gamma}) p_{\hat{\gamma}}(\hat{\gamma}) d\hat{\gamma}}{\bar{\nu}}, \quad (11)$$

donde  $CBEP_i$  es la BEP condicionada al  $i$ -ésimo modo de transmisión. Usando las aproximaciones exponenciales habituales para la probabilidad de error de las constelaciones BPSK y MQAM se obtiene que [2]

$$CBEP_i(\hat{\gamma}) \approx \frac{1}{5\Phi_i^{N_R}} \exp\left(-\frac{a_i S}{\Phi_i \bar{S}_T} \frac{\hat{\gamma}}{2^{R_i} - 1}\right) \quad (12)$$

con

$$a_i = \begin{cases} 1 & \text{para } i = 1 \text{ (BPSK)} \\ \frac{3}{2} & \text{para } i > 1 \text{ (} 2^{R_i}\text{-QAM)} \end{cases} \quad (13)$$

y

$$\Phi_i = 1 + a_i \frac{S}{\bar{S}_T} \frac{\chi \bar{\gamma}}{2^{R_i} - 1}. \quad (14)$$

La función  $\Phi_i$  puede interpretarse como la pérdida de diversidad efectiva en el  $i$ -ésimo modo de transmisión debida al error de predicción. Usando de nuevo (8)-(9) se llega a la siguiente expresión

$$ABEP = \frac{1}{\bar{\nu}} \sum_{i=1}^{N_F-1} R_i \sum_{k=1}^m \sum_{l=n-m}^{(n+m-2k)k} \sum_{w=0}^l \frac{K_{m,n} a_{k,l}}{((1-\chi)\bar{\gamma})^{l+1}} \frac{l!}{w!} \times \frac{1}{5\Phi_i^{N_R} \alpha^{l+1}} [(\alpha\hat{\gamma}_{i-1})^w e^{-\alpha\hat{\gamma}_{i-1}} - (\alpha\hat{\gamma}_i)^w e^{-\alpha\hat{\gamma}_i}] \quad (15)$$

donde

$$\alpha_i = \frac{a_i S}{\Phi_i \bar{S}_T} \frac{1}{2^{R_i} - 1} + \frac{k}{(1-\chi)\bar{\gamma}}. \quad (16)$$

#### B. Diseño

Consideramos dos tipos de diseño del esquema de modulación adaptativa para cumplir una determinada BEP objetivo  $BEP_T$ . El diseño **D1**, igual al propuesto en [2], no tiene en

cuenta los errores de predicción, por lo que la potencia y los umbrales de conmutación se determinan como

$$(D1) \begin{cases} S = \bar{S}_T \\ \{\hat{\gamma}_i\}_{i=1, \dots, N_F-1} = \frac{2^{R_i} - 1}{a_i} K_T, \end{cases} \quad (17)$$

donde  $K_T \triangleq -\log(5BER_T)$ . Por otra parte, el diseño **D2** es más conservador y considera el error de predicción a la hora de determinar los umbrales de conmutación entre modos de transmisión; por ello usando (12)

$$(D2) \begin{cases} S = \bar{S}_T \\ \{\hat{\gamma}_i\}_{i=1, \dots, N_F-1} = \frac{2^{R_i} - 1}{a_i} \Phi_i \cdot (K_T - N_R \log \Phi_i). \end{cases} \quad (18)$$

#### IV. RESULTADOS NUMÉRICOS

En la figura 2 se representa la eficiencia espectral y la  $BEP$  en función de la SNR media para el caso MIMO  $2 \times 2$  y  $N_F = 5$ . Los parámetros del sistema se corresponden con un escenario realista y son los siguientes: frecuencia de portadora  $f_c = 3$  GHz; velocidad del móvil  $v = 36$  km/h; intervalo de trama  $PT_S = 0.64$  ms, correspondiente a un sistema con  $P = 64$  y  $1/T_S = 100$  KHz; retardo de adaptación  $\tau = 2PT_S = 1.28$  ms; potencia de los pilotos igual a la de los datos ( $\bar{\gamma}_P = \bar{\gamma}$ ). Los resultados ponen de manifiesto las importantes diferencias que existen, especialmente bajo condiciones adversas en el canal, entre no asumir el error de predicción (**D1**) o hacerlo (**D2**) en el proceso de diseño del esquema de modulación adaptativa. El diseño **D1** no es capaz de cumplir la  $BEP_T = 10^{-3}$  preestablecida, mientras que **D2** lo consigue a costa de cierta pérdida de eficiencia espectral. Obsérvese el efecto positivo que tiene el aumentar el número de coeficientes  $F$  del filtro FIR predictor. Obviamente, la eficiencia espectral no puede superar en ningún caso los 6 bits/símbolo asociados al quinto modo de transmisión que emplea 64-QAM.

#### V. CONCLUSIONES

En este trabajo se han analizado y diseñado esquemas de modulación adaptativa para canales MIMO con desvanecimientos que usan conformación de haz en transmisión y combinación óptima en recepción. Los resultados obtenidos ponen de manifiesto el impacto que tiene en las prestaciones del sistema la consideración del error de predicción en el proceso de diseño.

#### AGRADECIMIENTOS

Este trabajo está parcialmente subvencionado por el Gobierno Español y la Unión Europea bajo el proyecto TIC2003-07819 (FEDER).

#### REFERENCIAS

[1] A. J. Goldsmith, *Wireless Communications*, 1st ed., Cambridge University Press, New York, 2005.  
 [2] S. Zhou, G.B. Giannakis, "How Accurate Channel Prediction Needs to be for Transmit-Beamforming With Adaptive Modulation Over Rayleigh MIMO Channel?" *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 3, pp. 1285-1294, Julio 2004.

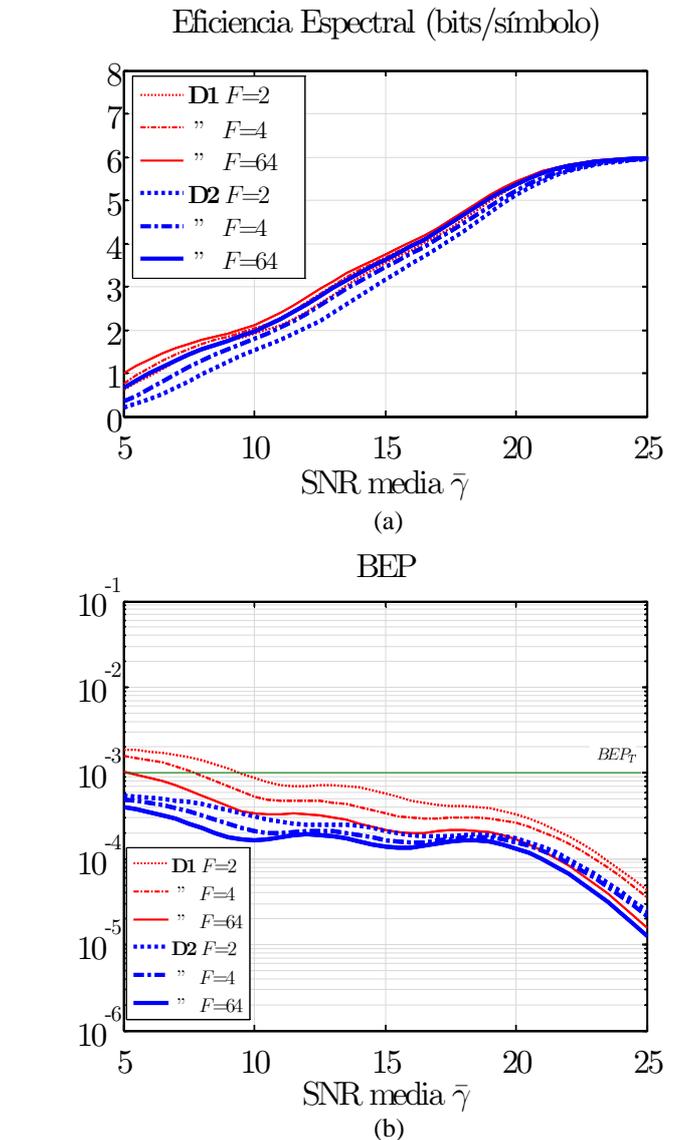


Fig. 2. Prestaciones de la modulación adaptativa para MIMO  $2 \times 2$ . Se consideran dos posibles diseños de modulación adaptativa: sin tener en cuenta el error de predicción (**D1**) o considerándolo (**D2**). Se muestra la eficiencia espectral (a) y la BEP (b) en función de la SNR media  $\bar{\gamma}$  y el número de coeficientes  $F$  del filtro predictor.

[3] A. J. Goldsmith, S.-G. Chua, "Variable-Rate Variable-Power M-QAM for Fading Channels," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 45, pp. 1218-1230, Oct. 1997.  
 [4] A.M. Tulino and S. Verdú, *Random Matrix Theory and Wireless Communications*, Now Publishers Inc., Hanover, MA, 2004.  
 [5] J. F. Paris and A. J. Goldsmith, "Adaptive Modulation for MIMO Multiplexing under Average BER Constraints and Imperfect CSI," *Proc. of Int. Conf. Comm. ICC 2006*, pp.1318-1325, Junio 2006.  
 [6] Z. Zhou and B. Vucetic, "Design of adaptive modulation using imperfect CSI in MIMO systems," *IEE Electron. Lett.*, pp. 1073-1075, Agosto 2004.  
 [7] Z. Zhou, B. Vucetic, M. Dohler, Y. Li, "MIMO Systems With Adaptive Modulation," *IEEE Trans. Veh. Tech.*, vol. 54, pp. 1828-1842, Sep. 2005.  
 [8] J. F. Paris and A. J. Goldsmith, "Adaptive Modulation for MIMO Beamforming under Average BER Constraints and Imperfect CSI," *Proc. of Int. Conf. Comm. ICC 2006*, pp.1312-1317, Junio 2006.  
 [9] A. Maaref and S. Aissa, "Closed-form expressions for the outage and ergodic Shannon capacity of MIMO MRC systems," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 53, pp. 1092-1095, Julio 2005.  
 [10] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, 5th ed., Academic Press, San Diego, 2000.