Estadística y modelización. Ingeniero Técnico en Diseño Industrial.

Relación de problemas: Variables aleatorias

1. Se lanza tres veces una moneda y se observa el número de caras.
   (a) Calcula la distribución de probabilidad de la variable aleatoria considerada.
   (b) Calcula la función de distribución.
   (c) ¿Cuántas caras se espera que salgan?

2. Se extraen cuatro cartas sin reemplazamiento de una baraja de 40. Calcula la distribución de probabilidad de las siguientes variables aleatorias:
   X="número de ases extraídos",
   Y="número de figuras extraídas".

3. Calcula la función de distribución, media y varianza de la variable aleatoria "número que sale al lanzar un dado".

4. Asociado al experimento aleatorio consistente en lanzar dos dados, se consideran las siguientes variables aleatorias:
   X="suma de las puntuaciones obtenidas en ambos dados",
   Y="máximo de las puntuaciones obtenidas en ambos dados".
   (a) Calcula las distribuciones de probabilidad de X y de Y.
   (b) Calcula las funciones de distribución de X y de Y.
   (c) Describe el suceso A="suma de las puntuaciones es mayor o igual que 10" usando la variable aleatoria X y calcula su probabilidad a través de la función de distribución.
   (d) Calcula la probabilidad del suceso B="máximo de las puntuaciones obtenidas es un número entre 2 y 6, incluídos ambos", usando la función de distribución de Y.

5. Se estima que un lote de 30 objetos contiene un 10% de defectuosos. El procedimiento de control de calidad consiste en examinar cinco objetos del lote y contar el número de defectuosos. Calcula la distribución de probabilidad de la variable que mide el número de objetos defectuosos, en la muestra de cinco objetos.

6. Una urna contiene 3 bola rojas, 4 bolas negras y 5 blancas. Se extraen sin reemplazamiento 3 bolas. Calcula la distribución de probabilidad, función de distribución, media y desviación típica de las siguientes variables aleatorias asociadas:
   R="número de bolas rojas extraídas "
   N="número de bolas negras extraídas"
   B="número de bolas blancas extraídas"

7. Un atleta de salto de longitud mantiene durante la temporada una estadística de saltos válidos del 70%. Describe la variable aleatoria discreta que mide el número de saltos que tiene que hacer dicho atleta hasta conseguir el primero no nulo.

8. La publicidad de ciertos fondos de inversión de alto riesgo afirma que la probabilidad de doblar la cantidad invertida es del 40%, la probabilidad de triplicarla es del 10%, la de perder la mitad es del 35% mientras que sólo un 15% de los clientes han perdido todo lo invertido. ¿Cuál es la ganancia esperada si decido invertir 6000 euros?

9. Un juego de azar consiste en lanzar tres dados, de manera que el jugador elige un número entre 1 y 6 y recibe una cantidad "a", si su número aparece una vez, el doble si aparece dos veces y el triple si aparece tres veces. Si el número elegido no figura entre los resultados, pierde "a". Calcula el beneficio esperado del jugador.

10. Las marcas obtenidas por un lanzador de peso sigue una variable aleatoria con densidad

$$f(x) = \begin{cases} k\dfrac{x^2}{9} & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

donde las distancias, X, se miden en decámetros.

(a) Calcula el valor de k.

(b) Calcula la probabilidad de que la distancia conseguida por el lanzador sea mayor que 20 metros.

(c) Calcula la probabilidad condicionada de que la marca sea superior a 25 metros sabiendo que es superior a 20 metros.

(d) Calcula la distancia media esperada así como una medida de la dispersión de la variable.

11. Una variable aleatoria tiene función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{10} & \text{si } 2 \leq x \leq 4 \\ k & \text{si } 4 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

(a) Calcula el valor de k.

(b) Calcula la función de distribución.

(c) Calcula $p\,(3 \leq X \leq 4)$.

(d) Calcula la probabilidad condicionada $p\,(X \leq 4.5 \mid X \geq 3)$.

12. Una variable aleatoria X que representa la duración en minutos de las llamadas realizadas en un locutorio público tiene por función de distribución

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \\ \dfrac{x^2}{25} & \text{si } 0 < x \leq 5 \\ \\ 1 & \text{si } x > 5 \end{cases}$$

   (a) Calcula la probabilidad de que una llamada dure tres minutos.
   (b) Calcula la probabilidad de que una llamada dure menos de tres minutos.
   (c) Calcula la función de densidad de la variable.
   (d) Calcula la duración esperada de una llamada.
   (e) Calcula la probabilidad de que una llamada dure menos de 4 minutos sabiendo que ha durado más de tres.

13. Se ha observado que un termómetro sometido a condiciones meteorológicas adversas da una medición de entre dos grados más y dos menos de la temperatura real. El error cometido sigue una variable aleatoria continua con densidad

$$f(x) = \begin{cases} k(2-x) & \text{si } -2 < x < 2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

   (a) Calcula el valor de k.
   (b) Calcula la función de distribución.
   (c) Calcula la probabilidad de que el termómetro dé la temperatura exacta.
   (d) Probabilidad de que el termómetro cometa un error de entre -1 y 1 grado.
   (e) Probabilidad de que el error sea menor que 1 sabiendo que es mayor que -1.
   (f) Estima el error esperado.

14. El tiempo de retraso, medido en minutos, del AVE Sevilla - Madrid sigue una variable aleatoria continua con función de distribución

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -1 \\ \\ k(x+1) + \dfrac{x^2-1}{2} & \text{si } -1 < x \leq 0 \\ \\ k(x+1) - \dfrac{x^2+1}{2} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

   (a) Calcula el valor de k.
   (b) Calcula la probabilidad de que el tren llegue con menos de medio minuto de retraso.

(c) Calcula la probabilidad de que el tren llegue antes de la hora prevista.

(d) Calcula el tiempo esperado de retraso.

(e) Calcula la probabilidad de que el tren llegue entre medio minuto de adelanto y un minuto de retraso.

(f) Sabiendo que el tren ha llegado con retraso, calcula la probabilidad de que lo haya hecho menos de 15 segundos después de lo previsto.

15. La duración en años de la batería de cierto modelo de teléfono móvil es una variable aleatoria continua X con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} k(x-2)^2 & \text{si} \quad 2 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

(a) Calcula el valor de k.

(b) Calcula la duración media de una batería.

(c) Calcula la probabilidad de que una batería dure más de 2 años y medio.

(d) Sabiendo que una batería tiene más de un año, calcula la probabilidad de que dure menos de 3.

16. Basándose en un gran número de pruebas, un fabricante de lavadoras piensa que el tiempo, en años, antes de que se necesite una reparación importante es una variable aleatoria cuya función de densidad es

$$f(x) = \begin{cases} kx & \text{si} \quad 3 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

(a) Calcula k para que $f(x)$ sea función de densidad.

(b) Calcula la función de distribución.

(c) Calcula media, varianza y desviación típica.

(d) Calcula la probabilidad de que la primera reparación importante deba hacerse antes de los dos años.

17. Una variable aleatoria X tiene función de distribución

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ k\left(1 - \dfrac{1}{x}\right) & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

(a) Calcula la función de densidad de la variable.

(b) Calcula el valor de k.

(c) Calcula la probabilidad de que la variable tome valores comprendidos entre 0.5 y 1.5.

(d) Calcula la probabilidad de que X sea mayor que 1.5 sabiendo que $X < 1.75$.

Algunas soluciones

1. a) $p(X=0)=\dfrac{1}{8}$, $p(X=1)=\dfrac{3}{8}$, $p(X=2)=\dfrac{3}{8}$, $p(X=3)=\dfrac{1}{8}$

   b)$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ 1/8 & \text{si } 0\le x<1 \\ 1/2 & \text{si } 1\le x<2 \\ 7/8 & \text{si } 2\le x<3 \\ 1 & \text{si } x\ge 3 \end{cases}$

   c) $E(X)=1.5$

2. a) $p(X=0)=0.6$, $p(X=1)=0.3125$, $p(X=2)=0.0413$, $p(X=3)=0.0015$, $p(X=4)=0.00109$.

   b) $p(Y=0)=0.224$, $p(Y=1)=0.4301$, $p(Y=2)=0.2729$, $p(Y=3)=0.0674$, $p(Y=4)=0.0054$.

3. $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<1 \\ 1/6 & \text{si } 1\le x<2 \\ 1/3 & \text{si } 2\le x<3 \\ 1/2 & \text{si } 3\le x<4 \\ 2/3 & \text{si } 4\le x<5 \\ 5/6 & \text{si } 5\le x<6 \\ 1 & \text{si } x\ge 6 \end{cases}$

   $E(X)=3.5$; $\sigma^2=35/12$

4. a) $p(X=2)=1/36$, $p(X=3)=1/18$, $p(X=4)=1/12$, $p(X=5)=1/9$, $p(X=6)=5/36$, $p(X=7)=1/6$, $p(X=8)=5/36$, $p(X=9)=1/9$, $p(X=10)=1/12$, $p(X=11)=1/18$, $p(X=12)=1/36$.

   $p(Y=1)=1/36$, $p(Y=2)=1/12$, $p(Y=3)=5/36$, $p(Y=4)=7/36$, $p(Y=5)=1/4$, $p(Y=6)=11/36$.

   b) Son muy largas.

   c) $p=1/6$

   d) $p=35/36$.

5. $p(X=0)=0.5665$, $p(X=1)=0.3694$, $p(X=2)=0.06157$, $p(X=3)=0.00246$.

6. $p(R=0)=0.3818$, $p(R=1)=0.4909$, $p(R=2)=0.1227$, $p(R=3)=0.004545$.

   $F_R(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ 84/220 & \text{si } 0\le x<1 \\ 192/220 & \text{si } 1\le x<2 \\ 219/220 & \text{si } 2\le x<3 \\ 1 & \text{si } x\ge 3 \end{cases}$

   $E(R)=0.75$; $V(R)=0.4602$.

$p(N=0)=0.25454$, $p(N=1)=0.509$, $p(N=2)=0.2181$, $p(N=3)=0.0181$.

$$F_N(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ 56/220 & \text{si } 0\le x<1 \\ 168/220 & \text{si } 1\le x<2 \\ 216/220 & \text{si } 2\le x<3 \\ 1 & \text{si } x\ge 3 \end{cases}$$

$E(N)=1$; $V(N)=0.5454$.

$p(B=0)=0.159$, $p(B=1)=0.4772$, $p(B=2)=0.3181$, $p(B=3)=0.0454$.

$$F_B(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ 35/220 & \text{si } 0\le x<1 \\ 140/220 & \text{si } 1\le x<2 \\ 210/220 & \text{si } 2\le x<3 \\ 1 & \text{si } x\ge 3 \end{cases}$$

$E(B)=1.25$; $V(B)=0.5965$.

7. $p(X=1)=0.7$, $p(X=2)=0.21$, $p(X=3)=0.063$, $p(X=4)=0.0189$, etc.

8. La ganancia esperada es de 1650 euros.

9. El beneficio esperado es de $-0.0787a$.

10. a) $k=1$.
    b) 0.7037
    c) 0.5985
    d) $E(X)=2.25$, $V(X)=0.3375$.

11. a) $k=2/5$
    b) $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<2 \\ x^2/20-1/5 & \text{si } 2\le x<4 \\ 2x/5-1 & \text{si } 4\le x<5 \\ 1 & \text{si } x\ge 5 \end{cases}$
    c) 7/20
    d) 11/15

12. a) 0
    b) 9/25
    c) $f(x)=\begin{cases} 2x/25 & \text{si} \quad 0\le x\le 5 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$
    d) 10/3
    e) 7/16

13. a) 1/8

    b) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -2 \\ \frac{x+3}{4} - \frac{x^2}{16} & \text{si } -2 < x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

    c) 0

    d) 0.5

    e) 8/9

    f) -2/3

14. a) $k = 1$

    b) 7/8

    c) 1/2

    d) 0

    e) 7/8

    f) 7/16

15. a) $k = 3/8$

    b) $E(X) = 3.5$

    c) 0.9843

    d) 0.125

16. a) $k = 1/8$

    b) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 3 \\ \frac{x^2-9}{16} & \text{si } 3 \leq x < 5 \\ 1 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$

    c) $E(X) = 4.0833$, $V(X) = 0.3263$, $\sigma = 0.5713$

    d) 0

17. a) $f(x) = \begin{cases} k/x^2 & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$

    b) $k = 2$

    c) 2/3

    d) 2/9.